

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# **ДИНАМІКА**

## **механічних конструкцій літаків, вертольотів, супутників**



### **Лабораторні роботи**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою  
«Літаки і вертольоти» спеціальності «Авіаційна та ракетно-космічна техніка»

П. В. Лук'янов

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2023

Рецензент

*Чепілко М.М., д.т.н., професор,  
кафедра СКЛА, ННІАТ, КПП ім. Ігоря Сікорського*

Відповідальний  
редактор

*Бондаренко О.М., к.т.н., доцент,  
кафедра АРБ, ННІАТ, КПП ім. Ігоря Сікорського*

*Гриф надано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 6 від 30.10.2023р.)  
за поданням Вченої ради факультету/навчально-наукового інституту  
(протокол № 5 від 22.10.2023 р.)*

Навчальний посібник укладено згідно основних розділів курсу динаміки механічних конструкцій, який читається студентам-магістрам згідно освітньої програми «Літаки і вертольоти», спеціальність 134- «Авіаційна та ракетно-космічна техніка».

Посібник містить 6 лабораторних робіт за наступними темами: вивчення умов рівноваги валу головного редуктора гелікоптера, рівняння руху відцентрового регулятора вертолїтного двигуна, диференціальне рівняння вимушених коливань механічної системи, Визначення амплітудно- та фазово- частотних характеристик коливальної системи, вільні коливання системи з двома степенями вільності, вимушені коливання в системі з двома степенями вільності. У посібнику наводяться приклади механізмів, що є складовими частинами авіаційної техніки, розрахунок яких здійснюється на основі методів аналітичної динаміки.

Структурно кожна практична робота складається з теоретичної частини, прикладів застосування теорії, завдань для виконання лабораторних робіт згідно даних варіантів. Обсяг посібника відповідає навчальним освітнім програмам «Літаки і вертольоти» рівня «магістр» за спеціальністю 134 - «Авіаційна та ракетно-космічна техніка».

Реєстр. № НП 21/22-606. Обсяг 4,5 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів  
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПП ім. Ігоря Сікорського, 2023

## Зміст

Вступ.

1. Вивчення умови рівноваги валу головного редуктора гелікоптера.
2. Рівняння руху відцентрового регулятора вертолiтного двигуна.
3. Диференціальне рівняння вимушених коливань механічної системи.
4. Визначення амплітудно- та фазово- частотних характеристик коливальної системи.
5. Вільні коливання системи з двома степенями вільності.
6. Вимушені коливання в системі з двома степенями вільності.

## Лабораторна робота №1

### Задачі про зрівноваження тіл, що обертаються навколо нерухомої вісі

**Мета.** Визначенні основних рівнянь динаміки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої вісі. Вивченні умови рівноваги валу головного редуктора гелікоптера.

**Обладнання.** Головний редуктор вертольота ВР-14.



Рис.1.1 Вал головного редуктора ВР-14

### Теоретичний матеріал

#### 1.1 Основні задачі динаміки твердого тіла. Диференціальні рівняння руху тіла.

У динаміці твердого тіла також виникають дві основні задачі: 1) за заданими кінематичними рівняннями руху твердого тіла і його масою визначити сили, що діють на тіло; 2) за заданими силами, що діють на тверде тіло, масою тіла і початковими умовами руху визначити закон руху тіла, тобто його кінематичні характеристики руху.

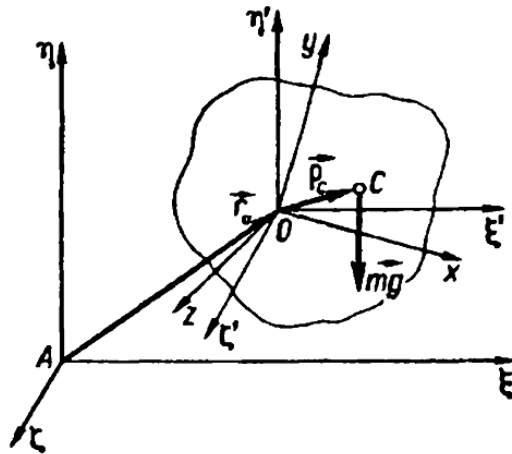


Рис.1.2

У разі невільного твердого тіла треба також визначити реакції в'язей. Розв'язання цих задач пов'язане з аналізом диференціальних рівнянь руху твердого тіла, які будуть виведені в цьому розділі. Подібно до того, як це було в кінематиці твердого тіла, розглянемо поступальний, обертальний навколо нерухомої осі, плоско-паралельний, обертальний навколо нерухомої точки руху твердого тіла.

Аналізуючи сили, що діють на тверде тіло, слід пам'ятати, що внутрішні сили у твердому тілі урівноважуються. Отже, сили, що діють на тверде тіло, є зовнішніми. Згідно з другою класифікацією, сили, що діють на тверде тіло, поділяють на активні та реакції в'язей. Цю класифікацію сил застосовують у разі невільного твердого тіла.

При вивченні динаміки твердого тіла звичайно вибирають такі системи координат, рис. 1.2:  $A\xi\eta\zeta$  - нерухома;  $O\xi'\eta'\zeta'$  - рухається поступально разом з полюсом, осі якої паралельні осям системи координат  $A\xi\eta\zeta$ ;  $Oxyz$  - незмінно зв'язана з тілом.

У системі координат  $Oxyz$  моменти інерції тіла є величинами постійними, а в системах координат  $O\xi'\eta'\zeta'$  і  $A\xi\eta\zeta$  змінними.

Очевидно, що координати полюса  $O(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  і три кути Ейлера - Крилова або інші параметри (Родрига-Гамільтона, Кейлі-Клейна,

кватерніони), про які йшлося в кінематиці і які характеризують положення системи координат  $Oxyz$  відносно системи координатних осей  $O\xi'\eta'\zeta'$  повністю визначають положення твердого тіла. Щоб розв'язувати сформульовані задачі динаміки твердого тіла, треба записати рівняння, які зв'язують ці параметри із силами, що діють на тверде тіло. Цих рівнянь має бути шість, оскільки існує шість незалежних параметрів, що визначають положення твердого тіла в просторі

Щоб вивести ці рівняння, скористаємося теоремами про змінення кількості руху тіла і його кінетичного моменту (моменту кількості руху), які в системі координат  $Oxyz$ , згідно з [1], записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} m\bar{\omega}_C &= \frac{d'\bar{Q}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{Q} = \bar{F}^e, \\ \frac{d'\bar{K}_O^\omega}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O^\omega &= \bar{M}_O^e - m\bar{\rho}_C \times \bar{\omega}_O. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Якщо полюс  $O$  помістити в центрі мас  $C$ , то  $\bar{\rho}_C = 0$  і рівняння (1.1) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} m\bar{\omega}_C &= \frac{d'\bar{Q}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{Q} = \bar{F}^e, \\ \frac{d'\bar{K}_C^\omega}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_C^\omega &= \bar{M}_C^e. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Цим двом векторним рівнянням, (1.1) або (1.2), відповідають шість скалярних рівнянь у проекціях на координатні осі, наприклад  $Ox, Oy, Oz$ .

Щоб наведена система рівнянь (1.1) або (1.2) була замкненою, до неї треба додати кінематичні рівняння, які дають можливість виразити проекції кутових швидкостей  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  через кути Ейлера – Крилова.  $\psi, \theta, \phi$  (або інші параметри) та їхні похідні.  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ .

Складемо рівняння просторового керованого руху твердого тіла в середовищі, яке чинить опір, наприклад у рідині. Будемо вважати, що тіло рухається під дією сили тяги, створюваної двигуном, і до цього тіла за допомогою спеціальних пристроїв прикладаються керувальні моменти для стабілізації та керування його кутовим положенням.

Введемо названі вище системи координат (рис. 1.2). Задамо положення тіла за допомогою шести параметрів: трьох координат полюса  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  і трьох кутів Ейлера - Кривола  $\psi, \theta, \varphi$ . Проекції кутових швидкостей на осі системи координат  $Oxyz$  мають вигляд:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi}, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= -\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Складемо вираз для кінетичної енергії тіла, а потім за допомогою співвідношень між основними динамічними величинами [1] обчислимо проекції  $Q_x, Q_y, Q_z, K_{Ox}^{(1)}, K_{Oy}^{(1)}, K_{Oz}^{(1)}$  (далі будемо писати спрощено  $K_x, K_y, K_z$ ):

$$\begin{aligned}Q_x &= \frac{\partial T}{\partial v_{Ox}}, \quad Q_y = \frac{\partial T}{\partial v_{Oy}}, \quad Q_z = \frac{\partial T}{\partial v_{Oz}}, \\ K_x &= \frac{\partial T^\omega}{\partial \omega_x}, \quad K_y = \frac{\partial T^\omega}{\partial \omega_y}, \quad K_z = \frac{\partial T^\omega}{\partial \omega_z}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Згідно з формулою (17.37) [1], маємо:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m (v_{Ox}^2 + v_{Oy}^2 + v_{Oz}^2) + \\ &+ m \begin{vmatrix} v_{Ox} & v_{Oy} & v_{Oz} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - I_{xy} \omega_x \omega_y - \\ &- I_{xz} \omega_x \omega_z - I_{yz} \omega_y \omega_z.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Звідси за допомогою наведених співвідношень між основними динамічними величинами знаходимо:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \frac{\partial T}{\partial v_{Ox}} = mv_{Ox} + m(\omega_y z_C - \omega_z y_C), \\
 Q_y &= \frac{\partial T}{\partial v_{Oy}} = mv_{Oy} - m(\omega_x z_C - \omega_z x_C), \\
 Q_z &= \frac{\partial T}{\partial v_{Oz}} = mv_{Oz} + m(\omega_x y_C - \omega_y x_C), \\
 K_x &= \frac{\partial T^\omega}{\partial \omega_x} = I_x \omega_x - I_{yx} \omega_y - I_{zx} \omega_z, \\
 K_y &= \frac{\partial T^\omega}{\partial \omega_y} = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\
 K_z &= \frac{\partial T^\omega}{\partial \omega_z} = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Спроектуємо рівняння (1.1) на осі системи координат  $Oxyz$ , враховуючи, що зовнішніми силами для тіла є сила вага  $\vec{P} = m\vec{g}$ , головний вектор і головний момент гідродинамічних сил  $\vec{F}^r, \vec{M}^r$ , сила тяги  $\vec{F}^r$  і керувальні моменти  $\vec{M}_0^{kep}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_x}{dt} + \omega_y Q_z - \omega_z Q_y &= P_x + F_x^r + F_x^r, \\
 \frac{dQ_y}{dt} + \omega_z Q_x - \omega_x Q_z &= P_y + F_y^r + F_y^r, \\
 \frac{dQ_z}{dt} + \omega_x Q_y - \omega_y Q_x &= P_z + F_z^r + F_z^r, \\
 \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y &= M_x^r + m \left[ y_C (g_z - w_{Oz}) - \right. \\
 &\quad \left. - z_C (g_y - w_{Oy}) \right] + M_x^{kep},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z &= M_y^r + m \left[ z_C (g_x - w_{Ox}) - \right. \\
&\quad \left. - x_C (g_z - w_{Oz}) \right] + M_y^{кр}, \\
\frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x &= M_z^r + m \left[ x_C (g_y - w_{Oy}) - \right. \\
&\quad \left. - y_C (g_x - w_{Ox}) \right] + M_z^{кр}.
\end{aligned}
\tag{1.7}$$

Доповнимо ці рівняння кінематичними співвідношеннями (1.3). Підставивши вирази  $Q_x, Q_y, Q_z$  і  $K_x, K_y, K_z$  із (1.6) у (1.7), дістанемо рівняння руху тіла в загальному вигляді. До цих рівнянь треба додати ще закон формування керувальних сил (сили тяги) і керувальних моментів.

Якщо кероване тверде тіло є, наприклад, підводним човном, то для формування зазначених керувальних сил і моментів на борту човна мають бути прилади, які вимірюють його кінематичні параметри (лінійні та кутові), обчислювальні пристрої і виконавчі органи. Як буде показано далі, кути, кутові і лінійні швидкості човна та інших об'єктів можна вимірювати за допомогою гіроскопів. Зауважимо, що обчислення головного вектора і головного моменту гідродинамічних сил є самостійною задачею гідродинаміки. Рівняння (21.7), як легко переконатися, нелінійні, тому зінтегрувати їх у загальному випадку неможливо. На практиці їх спрощують, розглядаючи малі кутові відхилення тіла і розділяючи рухи в поздовжній  $O\xi\eta$  та поперечній  $O\xi\zeta$  площинах і обертання навколо осі  $Ox$ . Далі обмежимося розглядом найпростіших рухів некерованого твердого тіла  $\vec{F}^r = \vec{0}, \vec{M}_o^{кр} = \vec{0}, \vec{F}^r = \vec{0}, \vec{M}^r = \vec{0}$ .

## 1.2 Поступальний рух твердого тіла

Якщо тіло здійснює поступальний рух, то це означає, що відносно системи координат  $O\xi'\eta'\zeta'$  (рис.1.2), яка рухається поступально, тіло перебуває у стані спокою. Отже, кутова швидкість і момент кількості руху відносно центра мас дорівнює нулю і, згідно з рівняннями (1.2),  $\vec{M}_C^e = \vec{0}$ .

Таким чином, для здійснення поступального руху тіла треба, щоб головний момент усіх зовнішніх сіл відносно центра мас і початкова кутова швидкість обертання тіла дорівнювали нулю. При цьому рух тіла буде повністю визначатися першим рівнянням (1.2), яке у проекціях на осі має вигляд:

$$m\ddot{x}_O = F_x^e, \quad m\ddot{y}_O = F_y^e, \quad m\ddot{z}_O = F_z^e. \quad (1.8)$$

Ці рівняння дають змогу розв'язати першу і другу задачі динаміки тіла в разі поступального його руху. На практиці здійснити поступальний рух некерованого твердого тіла досить складно через різного виду збурення і асиметрію тіл.

## 1.3 Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Рівняння для визначення реакції підшипників

Тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, наприклад  $Oy$  (рис.1.2, а), є прикладом невільного твердого тіла, положення якого у просторі визначається одним параметром - кутом  $\varphi$ . Якщо нас не цікавлять реакції в'язей, то таке тіло буде описуватися одним рівнянням руху, яке випливає із (21.7) [1]. При  $\omega_x = 0, \omega_y \neq 0, \omega_z = 0$  маємо:

$$\frac{dK_y}{dt} = I_y \dot{\omega}_y = I_y \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I_y \varepsilon = M_y^e. \quad (1.9)$$

Якщо ж нам треба визначити реакції в'язей у підшипниках  $A$  і  $B$  (рис. 1.2, а), то, застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, замінимо їх реакціями  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$ . Тепер тіло можна розглядати як вільне і його рух буде описуватися шістьма рівняннями руху (1.7), в які треба підставити відповідні значення проекцій кількості руху і кінетичного моменту (див. (1.6)).

Вважатимемо, що на тіло діють  $n$  активних сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ , головний вектор і головний момент яких відносно центра  $O$  позначимо через  $\vec{F}$  і  $\vec{M}_O$ . Введемо нерухому систему координат і незмінно зв'язану з тілом систему  $Oxyz$  (рис. 21.2). Взаємне положення осей задамо кутом  $\varphi$ .

Проекції реакцій  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$  на осі, зв'язані з тілом, позначимо  $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B$ , координати точок прикладання  $A$  і  $B$  яких дорівнюють відповідно  $0, y_A, 0; 0, y_B, 0$  (рис. 1.2, а). Проекції кутової швидкості тіла на нерухомі осі запишемо у вигляді:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega_z = 0. \quad (1.10)$$

Центр мас у рухомій системі координат має координати  $x_c, y_c, z_c$ . У рівняннях (1.7) поряд з активними силами і моментами треба врахувати реакції в'язей та їхні моменти. З урахуванням заданих параметрів, використовуючи співвідношення (21.6) [1], дістанемо:

$$\begin{aligned} Q_x &= m\omega z_c, \quad Q_y = 0, \quad K_x = -I_{xy}\omega, \quad K_y = I_y\omega, \\ Q_z &= -m\omega x_c, \quad K_z = -I_{zy}\omega. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Момент реакції  $\vec{R}_A$  в'язі відносно точки  $O$  буде:

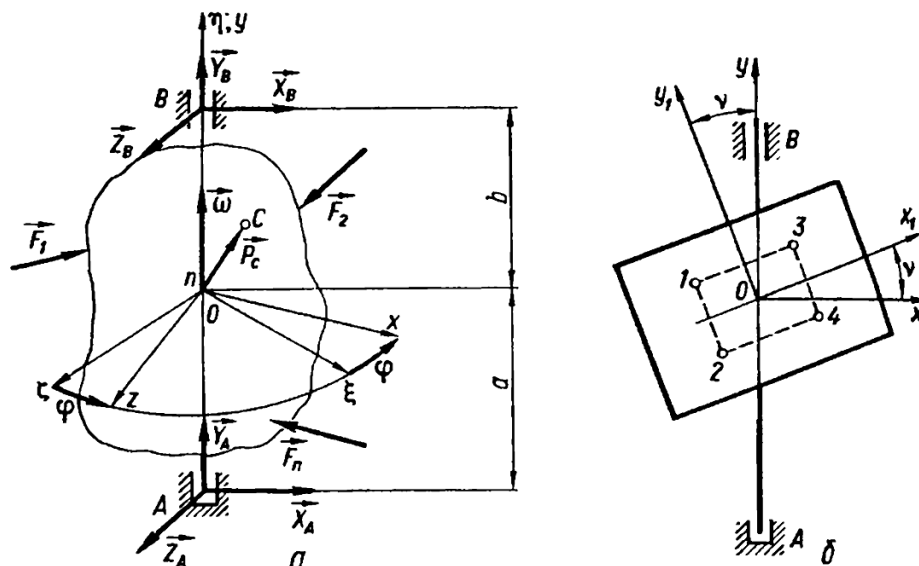


Рис.1.3

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_O(X_A, Y_A, Z_A) &= \vec{\rho}_A \times \vec{R}_A = \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y_A & 0 \\ X_A & Y_A & Z_A \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i}y_AZ_A - \vec{j}0 - \vec{k}y_AX_A,
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - орти рухомих осей.

Аналогічно записується момент реакції  $\vec{R}_B$  в'язі відносно того самого центра. Враховуючи останній вираз, проекції моментів реакцій на осі  $O_x, O_y, O_z$  набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}
 M_{O_x}(\vec{R}_A) &= y_A Z_A, \quad M_{O_y}(\vec{R}_A) = 0, \quad M_{O_z}(\vec{R}_A) = -y_A X_A, \\
 M_{O_x}(\vec{R}_B) &= y_B Z_B, \quad M_{O_y}(\vec{R}_B) = 0, \quad M_{O_z}(\vec{R}_B) = -y_B X_B.
 \end{aligned}$$

Підставивши ці рівності і (1.11) у (1.7) і враховуючи, що

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$$

остаточно дістанемо:

$$\begin{aligned}
 mz_C\varepsilon - m\omega^2 x_C &= F_x + X_A + X_B, \\
 0 &= F_y + Y_A + Y_B, \\
 -mx_C\varepsilon - m\omega^2 z_C &= F_z + Z_A + Z_B, \\
 -I_{xy}\varepsilon - I_{zy}\omega^2 &= M_x + y_A Z_A + y_B Z_B, \\
 I_y\varepsilon &= M_y, \\
 -I_{zy}\varepsilon + I_{xy}\omega^2 &= M_z - y_A X_A - y_B X_B.
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

П'ять рівняння цієї системи збігається з рівнянням (21.9) і не містить реакцій в'язей. Тому із системи рівнянь (1.14) можна визначити тільки п'ять невідомих проекцій реакцій із шести. Із другого рівняння (1.14) можна визначити суму  $Y_A + Y_B$ , оскільки  $Y_A$  і  $Y_B$  в інші рівняння не входять. Радіальні складові реакцій підшипників  $X_A, X_B, Z_A, Z_B$  визначають із чотирьох рівнянь, в які вони входять.

Таблиця 1.1

| № вар. | $\Omega, об / хв$ | $\varepsilon, рад / с^2$ | № вар. | $\Omega, об / хв$ | $\varepsilon, рад / с^2$ |
|--------|-------------------|--------------------------|--------|-------------------|--------------------------|
| 1      | 2520              | 0,5                      | 11     | 2640              | 0.575                    |
| 2      | 2640              | 0.525                    | 12     | 2880              | 0.55                     |
| 3      | 2760              | 0.55                     | 13     | 2520              | 0.6                      |
| 4      | 2880              | 0.575                    | 14     | 3000              | 0.525                    |
| 5      | 3000              | 0.6                      | 15     | 3240              | 0.55                     |
| 6      | 3120              | 0.625                    | 16     | 3360              | 0.7                      |
| 7      | 3240              | 0.65                     | 17     | 3120              | 0.6                      |
| 8      | 3360              | 0.675                    | 18     | 3480              | 0.8                      |
| 9      | 3480              | 0.7                      | 19     | 3600              | 0.675                    |
| 10     | 3600              | 0.8                      | 20     | 2760              | 0.65                     |

#### 1.4 Завдання самостійного виконання

Вихідні розрахункові дані :

1. Довжина вала  $l = 700\text{мм}$ , діаметр  $d = 85\text{мм}$ , форма – коловий циліндр, матеріал – сталь.
2. Частота обертання ротора гелікоптера (вала) та кутове прискорення наведені у Таблиці 1.1
3. Вважати, що кінці вала закріплені у підшипниках.

**Визначити:** динамічні реакції у підшипниках.

#### Контрольні запитання

1. Які рівняння динаміки твердого тіла вам відомо?
2. Які системи координат використовуються для опису динаміки руху твердого тіла?
3. Як визначаються моменти інерції твердого тіла?
4. Які з реакцій потрібно визначити для твердого тіла, що обертається навколо вісі?

## Лабораторна робота №2

### Рівняння руху відцентрового регулятора вертолітного двигуна

**Мета роботи:** Побудувати математичну модель руху відцентрового регулятора, дослідити можливі режими роботи регулятора.

**Обладнання.** Відцентровий регулятор Ватта.

#### Теоретична частина

##### 2.1 Загальні і теоретичні відомості

Відцентровий регулятор (рис.2.1) двигуна регулює подачу пального в залежності від частоти обертання ротора.

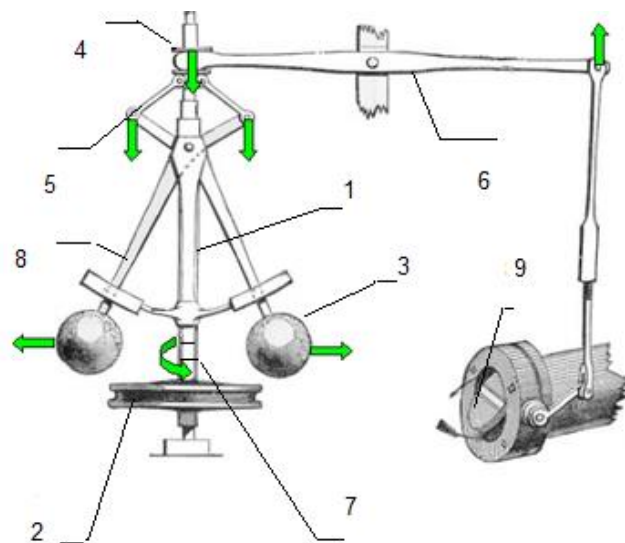


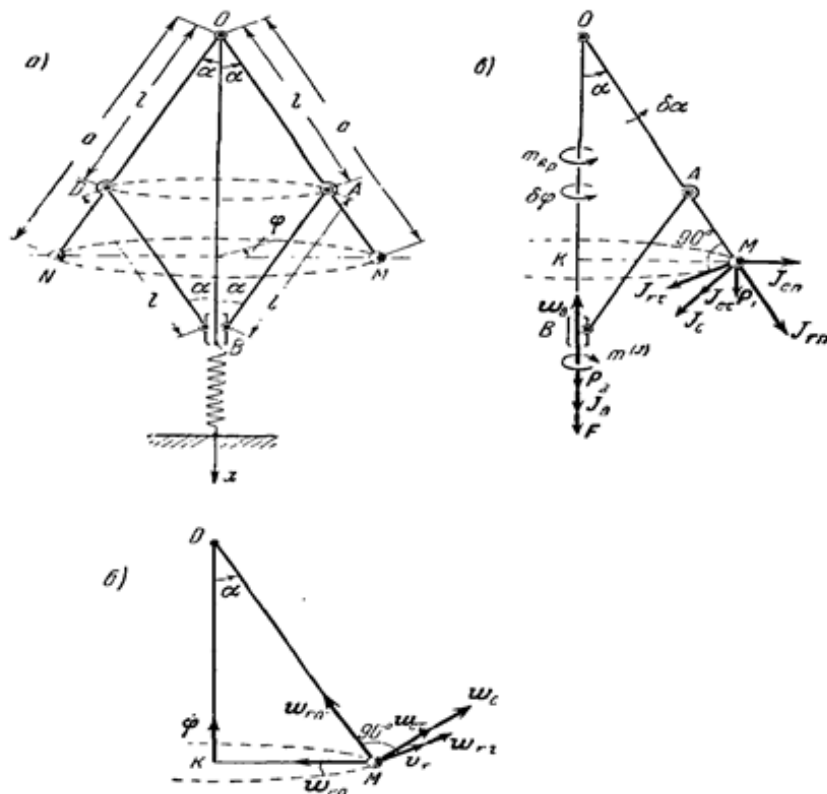
Рис.2.1 Відцентровий регулятор (Уатта), лабораторна установка:  
1-вал регулятора, 2- шків, 3- кулькові тягарці, 4-тяги,5-муфта, 6-коромисло, 7-шкала на валу, 8-тяги, 9-дросельна заслінка.

**2.2 Принцип роботи** відцентрового регулятора ґрунтується на використанні відцентрової сили з метою стабілізації обертання, яке дозволяє регулювати положення дросельної заслінки подавання пального в двигун.

Така дія відцентрового регулятора дозволяє впливати на кількість обертів двигуна, тобто регулює його частоту обертання.

## 2.3 Модель відцентрового регулятора

Схематично відцентровий регулятор можна представити у вигляді конструкції, зображеної на рис.2.2. На рис.2.2а зображено відцентровий регулятор, що обертається навколо вертикальної вісі завдяки дії пари сил з моментом  $m_{об} = m$ . Кулі регулятора  $M$  та  $N$  вагою  $P_1$  закріплені на кінцях стрижнів  $OM$  і  $ON$ , які шарнірно з'єднані у точці  $O$ . Муфта  $B$  вагою  $P_2$  шарнірно з'єднана зі стрижнями  $BA$  і  $BD$ , які у свою чергу з'єднані шарнірами  $A$  і  $D$  зі стрижнями  $OM$  і  $ON$ . Рух муфти  $B$  регулюється пружиною з коефіцієнтом пружності  $c$ . У початковому стані пружина не деформована,  $OM = ON = a$ ,  $OA = AB = BD = OD = l$ . Під час зміни навантаження машини змінюється кут  $\alpha$ , що утворюється стрижнями  $OM$  і  $ON$  з вертикаллю.





## рис.2.2 Схема відцентрового регулятора

Побудова математичної моделі руху відцентрового регулятора полягає у складанні диференціальних рівнянь руху регулятора. Будемо вважати, що момент інерції муфти  $B$  відносно вертикальної вісі дорівнює  $I$ . Кулі  $M$  і  $N$  вважатимемо точковими масами. Масами стрижнів та пружини можна знехтувати.

**2.3.1 Математична модель.** Відцентровий регулятор являє собою систему з 2-а степенями вільності. Дійсно, для визначення положень усіх його точок необхідно знати закон зміни у часі двох його параметрів:  $\varphi$  - кут повороту регулятора навколо вертикальної вісі,  $\alpha$  - кут відхилення, що утворюється стрижнями  $OM$  і  $ON$  з вертикаллю (рис.2.2а).

**Вихідні дані:**  $P_1$  - вага кожної з кульок,  $P_2$  - вага муфти,  $F$  - сила пружності пружини, момент обертання  $m_{об} = m$ .

**2.3.2 Опис складного руху, виведення системи рівнянь.** Слід відзначити наступні особливості руху окремих частин відцентрового регулятора. Це допоможе нам записати рівняння руху відцентрового регулятора. Отже, зі збільшенням кута  $\alpha$  муфта  $B$  піднімається вгору, пружина розтягується, і пружна сила  $F$  спрямована вертикально вниз. Модуль цієї сили дорівнює  $F = c \cdot |\Delta|$ , де  $\Delta$  - видовження пружини. Сили зображені на рис.2в. Для обчислення видовження пружини спрямуємо вісь  $x$  з точки  $O$  вздовж вісі обертання вниз.

Скориставшись властивостями рівнобедреного трикутника  $OAB$  ( $OA=AB=l$ ), маємо:

$$x_B = OB = 2l \cos \alpha. \quad (2.1)$$

З умови задачі пружина недеформована у вертикальному положенні стрижнів, тобто  $OB=2l$ . Видовження пружини  $\Delta_x = -2l(1 - \cos \alpha)$ . Отже, проекція на вісь  $x$  сили пружності  $F$  дорівнює:

$$F_x = -c\Delta_x = 2cl(1 - \cos \alpha). \quad (2.2)$$

Для визначення сил інерції куль  $M$  і  $N$  муфти  $B$  розглянемо їх прискорення. Муфта  $B$  здійснює поступальний рух вздовж вертикальної вісі. Взявши другу похідну від  $x_B$  за часом та скориставшись формулою (1), отримаємо:

$$\ddot{x}_B = -2l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - 2l\ddot{\alpha} \sin \alpha \quad (2.3)$$

(під час розрахунку похідних слід мати на увазі, що  $\alpha$  є функцією часу).

Знак «мінус» вказує, що прискорення  $w_B$  муфти  $B$  за звичень  $\ddot{\alpha} > 0$  напрямлено вздовж вертикалі вгору. А тому,

$$w_B = 2l(\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \ddot{\alpha} \sin \alpha). \quad (2.4)$$

Так як кулі  $M$  і  $N$  мають однакові за модулем прискорення, то достатньо розглянути прискорення однієї з них. Кулю  $M$  приймемо за матеріальну точку. Він приймає участь у складному русі: переносному обертальному русі навколо вертикальної вісі регулятора та у відносному русі разом зі стрижнем  $OM$ , що обертається навколо горизонтальної вісі  $O$ , яка перпендикулярна до площини рис.2б. Отже, абсолютне прискорення точки  $M$  можна визначити за теоремою про додавання прискорень під час переносного обертального руху:

$$w_M = w_{en} + w_{e\tau} + w_{rn} + w_{r\tau} + w_c. \quad (2.5)$$

Всі складові прискорення точки  $M$  зображено на рис.2б. Прискорення  $w_{en}, w_{rn}, w_{r\tau}$  розташовані у площині рисунка. Прискорення  $w_{e\tau}, w_c$  напрямлені перпендикулярно площині рисунка від нас.

Величини прискорень визначаються наступними формулами:

$$\left. \begin{aligned} w_{en} &= |MK| \dot{\phi}^2 = a\dot{\phi}^2 \sin \alpha, & w_{e\tau} &= |MK| \ddot{\phi} = a\ddot{\phi} \sin \alpha, \\ w_{rn} &= a\dot{\alpha}^2, & w_{r\tau} &= a\ddot{\alpha}, & w_c &= 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, v_r) = 2a\dot{\phi}\dot{\alpha} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

**Визначення сил інерції** кульок  $M$  і  $N$  і муфти  $B$  (рис.2в). Кулька  $M$  вважається точковою масою, тому:

$$J_M = -\frac{P_1}{g} w_M.$$

Враховуючи формулу (4), отримаємо:

$$J_M = J_{en} + J_{e\tau} + J_{rn} + J_{r\tau} + J_c,$$

де

$$\begin{aligned} J_{en} &= -\frac{P_1}{g} w_{en}, & J_{e\tau} &= -\frac{P_1}{g} w_{e\tau}, & J_{rn} &= -\frac{P_1}{g} w_{rn}, \\ J_{r\tau} &= -\frac{P_1}{g} w_{r\tau}, & J_c &= -\frac{P_1}{g} w_c. \end{aligned}$$

Сили інерції  $J_{rn}$ ,  $J_{en}$  і  $J_{r\tau}$  розташовані у площині рисунку, а сили інерції  $J_{e\tau}$  і  $J_c$  напрямлені перпендикулярно до площини рисунку.

У відповідності до формули (2.6) отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} J_{en} &= -\frac{P_1}{g} a\dot{\varphi}^2 \sin \alpha, & J_{e\tau} &= -\frac{P_1}{g} a\ddot{\varphi} \sin \alpha, & J_{rn} &= \frac{P_1}{g} a\dot{\alpha}^2, \\ J_{r\tau} &= -\frac{P_1}{g} a\ddot{\alpha}, & J_c &= 2 \frac{P_1}{g} a\dot{\varphi}\dot{\alpha} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Муфта  $B$  приймає участь в двох рухах: переносному поступальному русі уздовж вертикальної вісі з прискоренням  $w_B$  та відносному обертальному з кутовим прискоренням  $\ddot{\varphi}$  навколо вертикальної вісі. У відповідності до цих рухів сили інерції муфти зводяться до сили, що дорівнює головному вектору  $J_B$  і парі сил, момент якої дорівнює  $m^{(J)}$ .

Головний вектор  $J_B = -\frac{P_1}{g} w_B$ . Так як  $w_B$  напрямлено вгору, то  $J_B$  має напрямлення вздовж вертикалі вниз. У відповідності до формули (2.3):

$$J_B = 2 \frac{P_2}{g} l (\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + \ddot{\alpha} \sin \alpha). \quad (2.8)$$

Головний момент інерції

$$m^{(J)} = -I\ddot{\varphi}, \quad (2.9)$$

де  $I$  - момент інерції муфти  $B$  відносно вертикальної вісі регулятора.

Оскільки незалежними координатами, які визначають положення точок регулятора, є кути повороту  $\varphi$  і  $\alpha$ , то для розв'язання задачі слід надати два кутових переміщення  $\delta\varphi$  і  $\delta\alpha$ . Спрямуємо їх у бік зростання кутів повороту  $\varphi$  і  $\alpha$ .

Відповідно двом кутам повороту  $\varphi$  і  $\alpha$  складемо два рівняння руху. Під час отримання кожного з рівнянь руху зручно надати можливе переміщення, що відповідає даній координаті, а друге можливе переміщення вважати рівним нулеві. Так під час складання рівняння для координати  $\varphi$  необхідно надати системі можливе переміщення  $\delta\varphi$ , у той час як  $\delta\alpha$  вважати рівним нулеві. Відповідно для рівняння за координатою  $\alpha$ : надаємо можливе переміщення  $\delta\alpha$ , а  $\delta\varphi$  прирівнюємо нулю.

а) Складемо рівняння руху за координатою  $\varphi$ . Вважаємо:

$$\delta\varphi \neq 0, \delta\alpha = 0.$$

Це означає, що за відсутністю зміни кута  $\alpha$  відбувається повертання регулятора навколо вертикальної вісі на кут  $\delta\varphi$  у бік  $m_{об} = m$ . Після розрахунку суми робіт всіх сил і сил інерції на можливому кутовому переміщенні  $\delta\varphi$  прирівнюємо її нулю:

$$m\delta\varphi - 2J_{e\tau} |MK| \delta\varphi - 2J_c |MK| \delta\varphi - m^{(J)}\delta\varphi = 0 \quad (2.10)$$

(коефіцієнти 2 з'явилися за рахунок в системі двох куль  $M$  і  $N$ ).

Робота сил  $J_{en}, J_m, J_{r\tau}, P_1, P_2, F, J_B$  дорівнює нулеві, оскільки моменти цих сил відносно вертикальної вісі регулятора дорівнюють нулеві (робота сили під час обертання навколо нерухомої вісі дорівнює добутку моменту сили відносно цієї вісі на кутове прискорення).

Підставив у рівняння (2.10)  $MK = a \sin \alpha$  значення  $J_{er}$  і  $J_c$  з формул (2.7), значення  $m^{(j)}$  з формули (2.9), після скорочення рівняння на  $\delta\varphi$  отримаємо:

$$m - 2 \frac{P_1}{g} a^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \alpha - 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha - l \ddot{\varphi} = 0,$$

тобто

$$\left( J + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha \right) \ddot{\varphi} + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha - m = 0. \quad (2.11)$$

б) Складемо рівняння руху за координатою  $\alpha$ . Вважаємо, що

$$\delta\alpha \neq 0, \delta\varphi = 0.$$

Це означає, що за відсутності повороту регулятора навколо вертикальної вісі стрижні  $OM$  і  $ON$  відхиляються від вертикалі на кут  $\delta\alpha$ , обертаючись навколо горизонтальної вісі  $O$ , яка перпендикулярна до площини рисунка.

При цьому муфта  $B$  отримує можливе переміщення  $\delta x_B$  вздовж вертикальної вісі, яке можна визначити, якщо відома варіація  $x_B$ . Скориставшись формулою (1), отримаємо:

$$\delta x_B = -2l \sin \alpha \delta\alpha. \quad (2.12)$$

Знак «-» вказує на те, що можливе переміщення муфти  $B$  при  $\sin \alpha \cdot \delta\alpha > 0$  напрямлено вгору.

Після того, як ми обчислили суму робіт всіх сил, що задані, і сил інерції на можливому кутовому переміщенні  $\delta\alpha$ , прирівняємо її нулеві:

$$P_{ax} \delta x_B + F_x \delta x_B + J_{Bx} \delta x_B - 2P_1 |MK| \delta\alpha + 2J_{en} |OK| \delta\alpha - 2J_{r\tau} |OM| \delta\alpha = 0 \quad (2.13)$$

Робота сил  $J_{cr}, J_m, J_c$ , пари сил з моментом  $m_{ob} = m$  і пари сил інерції з моментом  $m^{(j)}$  дорівнює нулеві, так як моменти цих сил відносно горизонтальної вісі  $O$ , яка перпендикулярна до площини рисунка, дорівнюють нулю.

Підставимо у рівняння (12) наступні величини:  $MK = a \sin \alpha, OK = a \cos \alpha, OM = a$ , значення  $F_x$  з формули (2),  $J_B$  з формули (7),  $J_n$  і  $J_{rr}$  з формули (6),  $\delta x_B$  з формули (11). Прийнемо до уваги, що  $P_{2x} = P_2, J_{Bx} = J_B$ . Після скорочення рівняння на  $\delta \alpha$  отримаємо:

$$\begin{aligned} & -2P_2l \sin \alpha - 4cl^2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha - 4 \frac{P_2}{g} l^2 \ddot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha - \\ & - 4 \frac{P_2}{g} l^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \alpha - 2P_1a \sin \alpha - 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\varphi}^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \frac{P_1}{g} a^2 \ddot{\alpha} = 0 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & \frac{P_1a^2 + 2P_2l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} - \frac{P_1}{2g} a^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\alpha + \frac{2P_2}{g} l^2 \ddot{\alpha}^2 \sin 2\alpha + \\ & + 2cl^2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1a + P_2l) \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отже, система диференціальних рівнянь руху регулятора має наступний вид:

$$\left( J + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha \right) \ddot{\varphi} + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha - m = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \left( J + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha \right) \ddot{\varphi} + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha - m = 0, \\ & \frac{P_1a^2 + 2P_2l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} - \frac{P_1}{2g} a^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\alpha + 2 \frac{P_2}{g} l^2 \ddot{\alpha}^2 \sin 2\alpha + \\ & + 2cl^2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1a + P_2l) \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для сталого режиму роботи  $m = 0, \dot{\varphi} = \omega$  є незмінною величиною. У такому разі система рівнянь руху (2.11) і (2.16) прийме наступний вигляд:

$$2 \frac{P_1}{g} a^2 \omega \dot{\alpha} \sin 2\alpha = 0,$$

$$\frac{P_1 a^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} - \frac{P_1}{2g} a^2 \omega^2 \sin 2\alpha - 2 \frac{P_2}{g} l^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha +$$

$$+ 2cl^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1 a + P_2 l) \sin \alpha = 0.$$

З першого рівняння системи отримаємо  $\dot{\alpha} = 0$ , тобто  $\alpha$  є сталою величиною. Отже, під час сталого режиму роботи регулятора кути  $\alpha$ , які утворюються стрижнями  $OM$  і  $ON$  з вертикальною віссю, залишаються сталими. При цьому друге рівняння системи запишеться у вигляді:

$$- \frac{P_1}{g} a^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2cl^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1 a + P_2 l) \sin \alpha = 0.$$

Відкинувши корінь рівняння  $\alpha = 0$ , якій відповідає нестійкому положенню рівноваги, отримаємо залежність між кутовою швидкістю  $\omega$  обертання регулятора навколо вертикальної вісі та кутом відхилення  $\alpha$  стрижнів  $OM$  і  $ON$  відвертикальної вісі:

$$\omega^2 = g \frac{P_1 a + P_2 l + 2cl^2 (1 - \cos \alpha)}{P_1 a^2 \cos \alpha}. \quad (2.17)$$

Таким чином, кутова швидкість обертання регулятора є функцією геометричних, фізичних параметрів та кута відхилення  $\alpha$ .

### 3 Опис роботи експериментальної установки відцентрового регулятора

Повернемося до рис.1. На валу 1 регулятора розташована шкала 7, що дозволяє фіксувати вертикальний рух стрижнів, до яких прикріплені кулі 3. Цьому типу руху відповідає зміна вертикального положення муфти  $B$  на схемі регулятора (рис.2.2). Отже, під час роботи регулятора потрібно спостерігати за зміною відстані  $OB$ . Неважко помітити, що зміна цієї відстані призводить до зміни кута  $\alpha$ :

$$\alpha = \arccos \frac{OB}{2l}. \quad (2.18)$$

## 4 Порядок виконання роботи

### 4.3 Теоретичні розрахунки

1. З'ясувати можливі режими роботи відцентрового регулятора. Виписати окремо рівняння для різних режимів роботи регулятора.
2. Розглянути невстановлений режим роботи регулятора :  $\dot{\varphi} = (1 + n / 20)t$  ( $n$ -номер у списку групи студентів).
3. Для даного режиму розв'язати задачу Коші для системи рівнянь (10), (13). Вважати, що в момент часу  $t=0 : \varphi(0) = 0$ .
4. Побудувати графіки залежності  $\alpha = \alpha(t)$ .
5. Таблиця 1.1

| № вар. | $P_1, H$ | $P_2, H$ | № вар. | $P_1, H$ | $P_2, H$ |
|--------|----------|----------|--------|----------|----------|
| 1      | 4        | 3        | 11     | 3        | 2        |
| 2      | 5        | 4        | 12     | 6        | 7        |
| 3      | 7        | 6        | 13     | 2        | 8        |
| 4      | 8        | 9        | 14     | 6        | 7        |
| 5      | 6        | 7        | 15     | 9        | 5        |
| 6      | 9        | 5        | 16     | 10       | 8        |
| 7      | 10       | 8        | 17     | 4        | 3        |
| 8      | 3        | 2        | 18     | 5        | 4        |
| 9      | 6        | 7        | 19     | 7        | 6        |
| 10     | 2        | 8        | 20     | 8        | 9        |

### 5.2. Виміри



1. Для експериментальної перевірки отриманої моделі відцентрового регулятора виконаємо виміри зміни  $OB$  для різних частоти обертання  $\omega$  регулятора.

2. Вихідні параметри та дані розрахунку заносимо у таблицю.

Таблиця 2.1

| №<br>вимірюв. | $P_1$ | $P_2$ | $F$ | $m_{\text{од}} = m$ | $\alpha$ | $\omega$ | $OB$ | $\varphi$ |
|---------------|-------|-------|-----|---------------------|----------|----------|------|-----------|
| 1             |       |       |     |                     |          |          |      |           |
| 2             |       |       |     |                     |          |          |      |           |
| 3             |       |       |     |                     |          |          |      |           |

3. Порівнюємо значення  $\alpha$ , розраховані теоретично, зі значеннями, обчисленими на підставі вимірів.

4. Визначаємо порядок точності теоретичної моделі на підставі відносної похибки:

$$\Delta\alpha = \frac{|\alpha - \alpha_{\text{вим}}|}{\alpha} \cdot 100\% .$$

6. Робимо висновок щодо меж застосування запропонованої моделі відцентрового регулятора

### Контрольні запитання

1. З яких частин складається відцентровий регулятор?
2. Для чого використовується відцентровий регулятор?
3. Скільки ступенів вільності має відцентровий регулятор? Які узагальнені координати відповідають ступеням вільності регулятора?
4. Які існують сталі режими відцентрового регулятора?

### Лабораторна робота №3

#### Складання диференціального рівняння вимушених коливань механічної системи

**Мета роботи:** опанувати теорію коливань складних динамічних систем.

#### Теоретична частина

##### 3.1 Вільні (власні) коливання механічної системи з одним степенем вільності

*Вільними, або власними,* коливаннями механічної системи називають її коливання під дією консервативних сил, зумовлені початковим відхиленням точки чи точок системи від положення рівноваги або наданням їм початкової швидкості, наприклад за допомогою удару. Для системи з одним степенем вільності рівняння власних коливань мають вигляд:

$$a\ddot{q} + cq = Q. \quad (3.1)$$

де  $a$  - коефіцієнт інерції;  $c$  – узагальнений коефіцієнт жорсткості. Для того щоб рівняння (3.1) мало нетривіальний розв’язок ( $q \neq 0$ ), треба задати ненульові початкові умови при  $t = 0$ :

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \quad (3.2)$$

Розділимо всі члени в (3.2) на  $a$  та перепишемо його у формі:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (3.3)$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad (3.4)$$

де  $\omega_0$  - колова частота коливань.

Нагадаємо, що рівняння вигляду (3.1), (3.3) вже розглядали при вивченні коливань математичного (§ 16.8) [1], фізичного маятників, крутильних коливань тіла на струні (§ 21.5) [1], при дослідженні стійкості обертання твердого тіла навколо головних осей інерції (§21.9) [1]. Ці приклади показують, що в тому разі, коли узагальнена координата  $q$  є лінійним переміщенням, коефіцієнт  $a$  дорівнює масі матеріальної точки чи

тіла, а узагальнений коефіцієнт жорсткості  $c$  лінійній жорсткості пружини або коефіцієнту пропорційності відновлювальної сили. Якщо  $q$  - кут, то коефіцієнт інерції  $a$  дорівнює моменту інерції, а узагальнений коефіцієнт жорсткості  $c$  - жорсткості на кручення пружини, торсіона, струни або коефіцієнту пропорційності відновлювального моменту (наприклад,  $c = mgl$  для математичного або фізичного маятника).

Диференціальні рівняння руху, формули для частоти власних коливань математичного  $\omega_M$  та фізичного  $\omega_\phi$ , гіроскопічного  $\omega_T$  маятників (див. § 22.4) [1], тіла на пружині жорсткості  $c_H$ , що здійснює поступальні коливання

$\omega_H$ , і тіла, яке підвішене на струні або торсіоні та здійснює крутильні коливання  $\omega_{KP}$ , наведені в табл. 3.1.

Оскільки корені характеристичного рівняння, що відповідають рівнянню (3.3), є уявними ( $p = \pm i\omega_0, i = \sqrt{-1}$ ), то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (3.3) запишемо в рівноцінних формулах [1]:


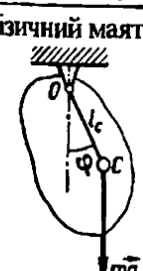
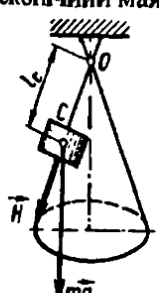
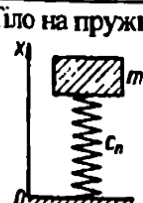
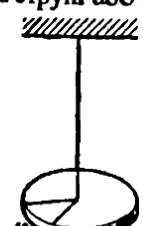
$$q = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t - \alpha), \quad (3.5)$$

де  $A_1, A_2, C_1, C_2, A, \alpha$  - сталі інтегрування, що зв'язані такими співвідношеннями:

$$C_1 = A_1 + A_2; \quad C_2 = i(A_1 - A_2); \\ A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_2}{C_1}. \quad (3.6)$$

Вираз (3.5) показує, що коефіцієнт  $A$  визначає найбільше відхилення точки від положення статичної рівноваги при коливному русі й

Таблиця. 3.1

| Механічна система   | Диференціальні рівняння руху малих коливань   | Частота власних коливань                  | Період власних коливань                  |
|---|---|---|--|
| <b>Математичний маятник</b><br>          | $ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0,$<br>$a = ml^2,$<br>$c = mgl$  | $\omega_m = \sqrt{\frac{g}{l}}$           | $T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$           |
| <b>Фізичний маятник</b><br>              | $I\ddot{\varphi} + mgl_c\varphi = 0,$<br>$a = I,$<br>$c = mgl_c$  | $\omega_\varphi = \sqrt{\frac{mgl_c}{I}}$ | $T_\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_c}}$ |
| <b>Гіроскопічний маятник</b><br>        | $\begin{cases} I\dot{\varphi} = H, \\ I\dot{\varphi}\dot{\alpha} - mgl_c\beta = 0, \\ I\dot{\varphi}\dot{\beta} + mgl_c\alpha = 0, \end{cases}$ $a = (I\dot{\varphi})^2, \quad c = (mgl_c)^2, \quad \dot{\varphi} = \text{const},$<br>$\alpha, \beta$ — кути повороту гіроскопа відносно зовнішньої і внутрішньої рамок | $\omega_r = \frac{mgl_c}{H}$              | $T_r = 2\pi\frac{H}{mgl_c}$              |
| <b>Тіло на пружині</b><br>             | $m\ddot{x} + c_n x = 0,$<br>$a = m, \quad c = c_n$  | $\omega_n = \sqrt{\frac{c_n}{m}}$         | $T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_n}}$         |
| <b>Тіло на струні або торсіоні</b><br> | $I\ddot{\varphi} + c_{кр}\varphi = 0,$<br>$a = I, \quad c = c_{кр}$   | $\omega_{кр} = \sqrt{\frac{c_{кр}}{I}}$   | $T_{кр} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c_{кр}}}$   |

називається *амплітудою коливань*. Кут  $\psi(t) = \omega_0 t - \alpha$  називається *фазою коливань*, а  $\alpha$  - *початковою фазою*, тому що  $\alpha = \psi(0)$ . *Періодом коливань*  $T_k$  називають проміжок часу між двома послідовними про ходженнями точки через положення статичної рівноваги в певному фіксованому напрямку. Оскільки коливання описуються косину соїдою, а найменший період косинуса  $2\pi$ , то

$$2\pi = \omega_0 T_k; \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (3.7)$$

Як видно з формул (3.7) і (3.4), колова частота власних коливань та їх період не залежать для лінійної системи від початкових умов і амплітуди коливань. Визначимо амплітуду  $A$  коливань за заданих початкових умов (3.2). На основі формул (3.5) одержимо:

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \\ \dot{q} = \omega_0 (-C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t)$$

Підставляючи в ці вирази початкові умові (3.2) при  $t = 0$ , дістанемо:

$$C_1 = q_0, \quad \omega_0 C_2 = \dot{q}_0.$$

З урахуванням значень  $C_1$  і  $C_2$  рівняння коливань точки подамо у вигляді:

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \\ = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}} \cos (\omega_0 t - \alpha), \\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\dot{q}_0}{\omega_0 q_0}. \quad (3.8)$$

Із (3.49) видно, що коли одночасно  $q = 0$  і  $\dot{q} = 0$ , то  $q = 0$ , тобто вільні коливання не виникають.

Покажемо, як вивести формули для амплітуди і частоти коливань, не складаючи диференціальних рівнянь руху. Розглядувані коливання є незгасаючими, оскільки вони зумовлені дією консервативних сил, а тому має місце закон збереження енергії, яку надаємо точці початковими умовами. У разі відхилення точки від положення рівноваги на величину, що дорівнює амплітуді, вся енергія поля перетворюється в потенціальну  $\Pi_{\max}$ , а в разі проходження точкою положення рівноваги - в кінетичну  $T_{\max}$ . При цьому виконуються співвідношення. При цьому виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} T + \Pi &= T_0 + \Pi_0, \\ T_{\max} &= T_0 + \Pi_0 = \Pi_{\max}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Оскільки

$$T_0 + \Pi_0 = \frac{1}{2} a \dot{q}_0^2 + \frac{1}{2} c q_0^2 \quad (3.10)$$

та з урахуванням (3.5)

$$T_{\max} = \frac{a}{2} (A \omega_0)^2, \quad \Pi_{\max} = \frac{c}{2} A^2, \quad (3.11)$$

то, підставляючи (3.11), (3.10) в (3.9) і розв'язуючи систему одержаних двох рівнянь з невідомими  $A^2$  і  $\omega_0^2$ , дістанемо:

$$A^2 = q_0^2 + \dot{q}_0^2 \frac{a}{c}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{a}. \quad (3.12)$$

Розглянутий енергетичний метод визначення амплітуди і частоти власних коливань часто застосовують при дослідженні вільних коливань консервативних систем.

### **3.2 Вплив сили опору, що лінійно залежить від швидкості, на коливання механічної системи з одним степенем вільності**

Розглянемо характер коливань механічної системи з одним степенем вільності, якщо під дією початкових умов збудені її коливання, а на неї діє сила опору, пропорційна першому степеню швидкості. Таку силу опору називають силою в'язкого тертя. При ньому, як показано в § 27.8 [1], енергія системи, яку вона набула в початковий момент часу, зменшуватиметься (розсіюватиметься), тому, природно, амплітуда коливань теж зменшуватиметься і з часом коливання згаснуть. Диференціальні рівняння руху системи в цьому разі легко одержати з (30.16):

$$a \ddot{q} + \beta \dot{q} + c q = 0, \quad (3.13)$$

де при  $t = 0, q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$ . Розділивши всі члени рівняння (3.13) на коефіцієнт  $a$ , дістанемо:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (3.14)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$ ,  $h = \frac{\beta}{2a}$  - відношення коефіцієнт демпфірування коливань, що має розмірність колової частоти  $\omega_0$  коливань. Характеристичне рівняння для (3.14) має вигляд:

$$p^2 + 2hp + \omega_0^2 = 0, \quad (3.15)$$

звідки

$$p_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}.$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (3.14) запишемо у вигляді

$$q = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (3.16)$$

Із (3.16) видно, що коли  $h > \omega_0$ , то обидва корені характеристичного рівняння дійсні й різні, тому коливального руху не буде, оскільки координата  $q$  змінюється по експоненті.

При  $h = \omega_0$ ,  $p = p_1 = p_2$  і розв'язок рівняння (3.15) також буде аперіодичним:

$$q = (C_1 + C_2 t) e^{-ht}. \quad (3.17)$$

Для виникнення коливального руху має виконуватись умова  $h < \omega_0$ . Оскільки в цьому випадку корені характеристичного рівняння комплексні, то, згідно з формулою Ейлера (3.22) [1], у розв'язок (3.17) увійдуть періодичні функції.

Найважливішим є випадок коливального руху, тобто коли  $h < \omega_0$ .

Позначивши  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ , запишемо розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} q &= e^{-ht} (A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}) = \\ &= e^{-ht} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) = \\ &= A e^{-ht} \cos(\omega_1 t - \alpha). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тоді

$$\dot{q} = e^{-ht} \omega_1 (-C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t) - hq. \quad (3.19)$$

Підставивши у вирази (3.18) і (3.19) початкові умови, після елементарних перетворень одержимо:

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_1} (\dot{q}_0 + hq_0). \quad (3.20)$$

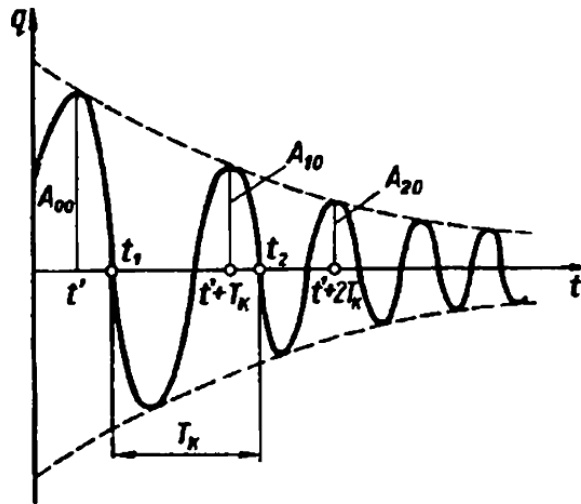


Рис.3.1

Звідси, скориставшись (3.6), отримаємо:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{1}{\omega_1^2} (\dot{q}_0 + hq_0)^2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\omega_1 q_0}. \quad (3.21)$$

Залежність  $q(t)$  показана на рис. 3.1. Рух точки є коливальним, але не періодичним, оскільки  $q(t) \neq q(t + T_k)$ . Тому умовно введемо поняття періоду  $T_k$  такого руху.

Періодом  $T_k$  згасаючих коливань (рис.30.7) називають проміжок часу  $[t_1, t_2]$  між двома послідовними проходженнями точки (тіла) через положення статичної рівноваги в певному фіксованому напрямку.



Із рівняння (3.18) випливає, що у положеннях статичної рівноваги  $(t_1, t_2, \dots, t_s)$  на рис. 3.1  $\cos(\omega_1 t - \alpha) = 0$ . Оскільки  $\omega_1 T_k = 2\pi$ , то

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - h^2 / \omega_0^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{\omega_0^2} + \dots \right). \quad (3.22)$$

Звідси видно, що період згасаючих коливань більший за період незгасаючих коливань, тобто *опір середовища, що пропорційний швидкості в першому степені, збільшує період коливань*

Дослідимо максимальні відхилення  $A_{10}, A_{20}, A_{30}$  відповідають моментам часу  $t', t' + T_k, t' + 2T_k, \dots$  на рис. 3.1. Оскільки  $\omega_1 T_k = 2\pi$ , то  $\cos[\omega_1(t' + sT_k) - \alpha] = \cos(\omega_1 t' - \alpha)$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , отже, на основі (3.18) одержимо:

$$\frac{A_{10}}{A_{00}} = \frac{A_{20}}{A_{10}} = \dots = \frac{A_{s0}}{A_{s-1,0}} = e^{-hT_k} = \eta. \quad (3.23)$$

Таким чином, *амплітуда згасаючих коливань у разі в'язкого тертя спадає за геометричною прогресією*. Величину  $\eta$  (знаменник геометричної прогресії) називають *декрементом згасання* (або *фактором згасання*), а модуль натурального логарифма цієї величини

$$|\ln \eta| = hT_k. \quad (3.24)$$

- логарифмічним декрементом згасаючих коливань.

Поняття про декремент згасаючих коливань використовують при експериментальному визначенні коефіцієнта опору середовища. На завершення зазначимо, що при силі опору у вигляді тертя ковзання або “сухого” тертя амплітуди згасаючих коливань спадають за арифметичною прогресією.

### 3.3 Вимушені коливання системи з одним степенем вільності без урахування сил опору

Змушені коливання відбуваються за умови, що на матеріальну точку, крім відновлювальної сили, діє збурювальна сила  $Q$ , що змінюється за гармонічним законом, тобто  $Q = H_0 \sin \omega t$ , де  $H_0$  - максимальне значення збурювальної сили;  $\omega$  - колова частота збурювальної сили. На основі (30.13), (30.14) [1] диференціальне рівняння руху такої системи, що має один степінь вільності, набуде вигляду:

$$a\ddot{q} + cq = H_0 \sin \omega t, \quad (3.25)$$

або після ділення на  $a$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = H \sin \omega t, \quad (3.26)$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}; \quad H = \frac{H_0}{a}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.26) подамо у вигляді:

$$q = q_1 + q_2, \quad (3.27)$$

де  $q_1$  - загальний розв'язок однорідного рівняння;  $q_2$  - частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння шукаємо у формі:

$$q_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (3.28)$$

При визначенні частинного розв'язку розглянемо три випадки:

$$\omega_0 \neq \omega; \quad \omega_0 \approx \omega; \quad \omega_0 = \omega.$$

1. Частота вільних коливань не дорівнює частоті збурювальної сили ( $\omega_0 \neq \omega$ ). У цьому випадку частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$q_2 = A^* \sin \omega t. \quad (3.29)$$

Підставляючи вираз (3.29) у (3.26), одержимо рівняння для визначення  $A^*$

$$A^* (\omega_0^2 - \omega^2) = H. \quad (3.30)$$

Звідси

$$A^* = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.31)$$

Тут очевидна необхідність припущення  $\omega_0 \neq \omega$ , оскільки при  $\omega_0 = \omega$  рівність (3.30) втрачає зміст. Підставляючи (3.31) в (3.29), а (3.28) і (3.29) у (3.27), шуканий розв'язок набуде вигляду:

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (3.32)$$

Підставляючи в рівність (3.32) початкові умови, визначимо

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \left[ \dot{q}_0 - \frac{H\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right].$$

Враховуючи ці вирази, остаточно одержимо

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \left( \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_0} \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \times \\ \times \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (3.33)$$

Із (3.33) очевидно, що коливальний рух розглядуваної системи з одним степенем вільності складається з вільних коливань з частотою  $\omega_0$  і змущених коливань з частотою  $\omega$  збурювальної сили. Причому на відміну від вільних коливань (§30.4) [1], що описуються однорідними диференціальними рівняннями, вільні коливання за наявності збурювальної періодичної сили збуджуються також за нульових початкових умов ( $q_0 = 0, \dot{q}_0 = 0$ ).

Як видно із (3.33), при  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплітуда  $A^*$  змушених коливань (3.31) необмежено зростає (рис. 3.2).

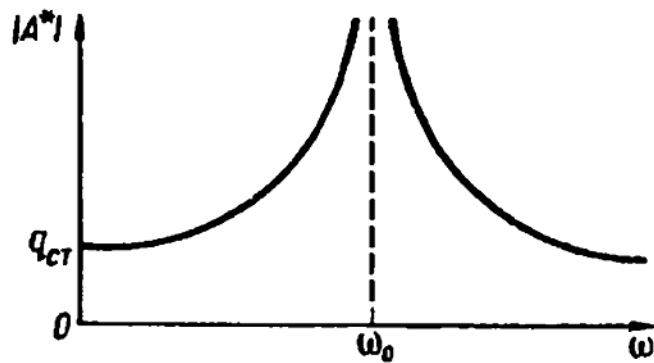


Рис.3.2

### 3.4 Приклад виконання лабораторної роботи:

#### 3.4.1 Складання диференціального рівняння вимушених коливань механічної системи

##### 1. Вивід рівняння коливань фізичного маятника

Нехай є фізичний маятник , зображений на рис.3.3

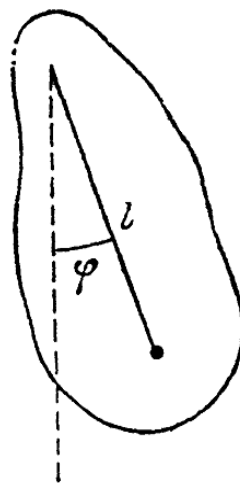


Рис.3.3

Рух даної механічної системи обумовлений зміною кінетичної та потенціальної енергій. Отже кінетична енергія фізичного маятника є

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}. \quad (3.34)$$

Тут  $m$  – маса матеріальних точок;  $v$  – їх швидкості (замість суми можна написати інтеграл). Далі

$$v = r\dot{\varphi}$$

та

$$T = \sum \frac{mr^2}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} \quad (3.35)$$

( $I$  – момент інерції).

Потенціальна енергія є

$$U = Pl(1 - \cos \varphi).$$

На основі закону збереження енергії:

$$T + U = \frac{I}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + Pl(1 - \cos \varphi) = C'^2,$$

де  $C'^2$  – стала величина. Це диференціальне рівняння руху фізичного маятника, воно нелінійне.

1а) випадок малих значень  $\varphi$ . Вважаємо, що

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Тоді замість (1) можна записати наближене рівняння

$$\frac{I}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{Pl}{2} \varphi^2 = C'^2.$$

Позначивши

$$\frac{2C'^2}{Pl} = C^2,$$

отримаємо

$$\frac{I}{Pl} \dot{\varphi}^2 + \varphi^2 = C^2,$$

звідки

$$\varphi = C \cos (\omega t + \psi),$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{Pl}{I}}.$$

Для математичного маятника маси  $m$  та довжини  $l$

$$I = l^2 m, \quad P = mg, \quad \tau = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

2. Крутильні коливання. Розглянемо випадок кручення. Нехай є стрижень круглого перерізу з диском на кінці. Тут

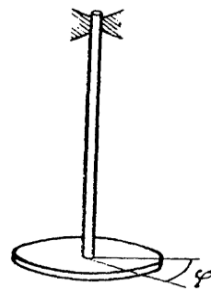


Рис.3.4

$$U = \frac{K\varphi^2}{2}, \quad T = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Рівняння коливань є:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{K\varphi^2}{2} = C'^2,$$

Так що тут знову отримуємо гармонічні коливання. Частота дорівнює

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}.$$

3. Коливальна система два диски, з'єднані валом (рис.3).

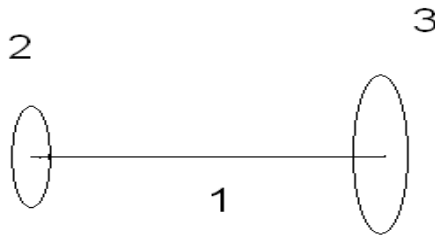


Рис.3.5: 1,3 – диски, 2- вал.

Дана система має дві ступені вільності: по-перше, диски можуть обертатись як єдине тверде тіло разом з валом; по-друге, диски можуть обертатися один відносно одного, закручуючи вал. Розрахуємо рух такої системи. Її кінетична енергія дорівнює:

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}_2^2}{2},$$

де  $I_1, I_2$  - моменти інерції дисків,  $\varphi_1, \varphi_2$  - кути повороту.

Потенціальна енергія тільки залежить від різниці

$$\varphi_1 - \varphi_2: U = \frac{k(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2},$$

причому коефіцієнт  $k$  характеризує пружність стрижня під час кручення.

**Завдання.** Скласти рівняння малих коливань сталевого стрижня довжини  $l$  та діаметру  $d$ . Початкові умови взяти з таблиці згідно з варіантом.

Таблиця 3.1

| № вар. | $\varphi(0)$ , рад | $\dot{\varphi}(0)$ , рад/с | № вар. | $\varphi(0)$ , рад | $\dot{\varphi}(0)$ , рад/с |
|--------|--------------------|----------------------------|--------|--------------------|----------------------------|
| 1      | 0,01               | 3                          | 11     | 0,02               | 2                          |
| 2      | 0,02               | 4                          | 12     | 0,03               | 7                          |
| 3      | 0,03               | 6                          | 13     | 0,04               | 8                          |

|    |      |   |    |      |   |
|----|------|---|----|------|---|
| 4  | 0,04 | 9 | 14 | 0,05 | 7 |
| 5  | 0,05 | 7 | 15 | 0,02 | 5 |
| 6  | 0,02 | 5 | 16 | 0,03 | 8 |
| 7  | 0,03 | 8 | 17 | 0,04 | 3 |
| 8  | 0,04 | 2 | 18 | 0,01 | 4 |
| 9  | 0,01 | 7 | 19 | 0,00 | 6 |
| 10 | 0,00 | 8 | 20 | 0,05 | 9 |

### Контрольні запитання

1. Рівняння вільних коливань системи з двома степенями вільності.
2. Рівняння вимушених коливань з урахуванням опору. Декремент затухання.
3. Використання закону збереження повної механічної енергії для складання диференціального рівняння руху фізичного маятника, крутильних коливань.



## Лабораторна робота №4

**Мета роботи:** навчитись визначати амплітудно-фазово та частотні характеристики системи.

### Теоретична частина.

**4.1** Вимушені коливання механічної системи з одним степенем вільності з урахуванням сили опору середовища, що пропорційна першому степеню швидкості.

На основі рівностей (30.13) і (30.14) диференціальне рівняння руху механічної системи з одним степенем вільності за наявності періодичної збурювальної сили і сили опору середовища має вигляд.

$$a\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = H_0 \cos \omega t. \quad (4.1)$$

Розділивши всі члени рівняння (4.1) на коефіцієнт  $a$ , запишемо його так:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = H \cos \omega t, \quad (4.2)$$

де

$$2h = \frac{\beta}{a}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad H = \frac{H_0}{a}. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.2) будемо розв'язувати за таких початкових умов  $t=0, q(0)=q_0, \dot{q}(0)=\dot{q}_0$ . Як і в попередньому параграфі загальний розв'язок рівняння (4.2) подамо у вигляді суми загального розв'язку  $q_1$  однорідного рівняння і частинного розв'язку  $q_2$ .

$$q = q_1 + q_2.$$

Характеристичне рівняння для (4.2) і його корені вже були детально проаналізовані в §30.5 [1], тому на побудові загального розв'язку  $q_1$

однорідного рівняння зупинятися не будемо. Перейдемо одразу до пошуку частинного розв'язку рівняння (4.2), який будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned} q_2 &= B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t = \\ &= B \cos (\omega t + \sigma), \end{aligned} \quad (4.3)$$

де  $B_1, B_2, B, \sigma$  - сталі, що зв'язані між собою співвідношеннями:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \operatorname{tg} \sigma = -\frac{B_2}{B_1}.$$

Потім треба, як і в попередньому випадку (§ 30.6), підставити (4.1) в рівняння (4.2) і, прирівнявши коефіцієнти при  $\cos \omega t$  і  $\sin \omega t$  зліва і справа скласти два рівняння для визначення двох невідомих сталих -  $B_1$  і  $B_2$  (або  $B$  і  $\sigma$ ).

Пропонуємо виконати ці перетворення самостійно, а тут побудуємо розв'язання так званим *методом комплексних амплітуд*. Праву частину рівняння (4.2) запишемо так:

$$H \cos \omega t = \frac{H}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (4.4)$$

і знайдемо послідовно реакцію системи  $q_2^{(1)}$  на  $\frac{H}{2} e^{i\omega t}$  і  $q_2^{(2)}$  на  $\frac{H}{2} e^{-i\omega t}$ . Розв'язок  $q_2^{(1)}$  будемо шукати у формі:

$$q_2^{(1)} = A_1 e^{i\omega t}. \quad (4.5)$$

Оскільки

$$\dot{q}_2^{(1)} = A_1 i\omega e^{i\omega t}, \quad \ddot{q}_2^{(1)} = A_1 (i\omega)^2 e^{i\omega t},$$

то, підставивши в (4.4) шуканий розв'язок (4.5), з урахуванням (4.4), матимемо:

$$A_1 = \frac{H/2}{(i\omega)^2 + 2hi\omega + \omega_0^2} = \frac{H/2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2hi\omega}. \quad (4.6)$$

Для подальших перетворень нагадаємо деякі співвідношення між комплексними числами. Якщо  $n$  і  $\bar{n}$  - комплексно-спряжені числа ( $n = b + id, \bar{n} = b - id$ ), то виконуються такі співвідношення (рис. 30.10):

$$n\bar{n} = (b + id)(b - id) = b^2 + d^2, \quad n = b + id = \sqrt{b^2 + d^2} e^{i\sigma} = \sqrt{b^2 + d^2} (\cos \sigma + i \sin \sigma),$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{d}{b},$$

$$\bar{n} = b - id = \sqrt{b^2 + d^2} e^{-i\sigma}. \quad (4.7)$$

Геометричну інтерпретацію комплексних чисел показано на рис. 4.1, *а*, формул. Ейлера - на рис. 4.1, *б*.

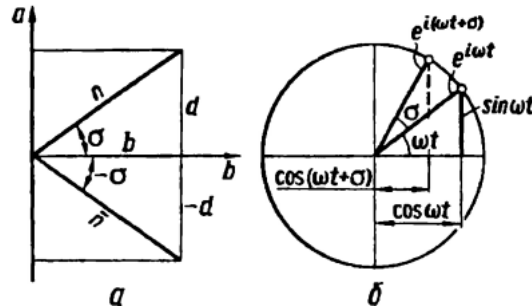


Рис.4.1

З урахуванням наведених формул (4.7) вираз (4.6) перетворимо до вигляду:

$$A_1 = A_0 e^{i\sigma},$$

де

$$A_0 = \frac{H}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}};$$

$$\sigma = \operatorname{arctg} \frac{-2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ейлера - на рис. 4.1,б. Аналогічно знайдемо розв'язок рівняння (4.2) коли в його правій частині стоїть  $\frac{H}{2}e^{-i\omega t}$ :

$$q_2^{(2)} = A_2 e^{-i\omega t} = A_0 e^{-i\sigma} e^{-i\omega t}.$$

Складаючи  $q_2^{(1)}$  і  $q_2^{(2)}$  остаточно дістанемо:

$$\begin{aligned} q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = A_0 e^{i\omega t} e^{i\sigma} + A_0 e^{-i\omega t} e^{-i\sigma} = \\ &= A_0 \left( e^{i(\omega t + \sigma)} + e^{-i(\omega t + \sigma)} \right) = \\ &= B \cos(\omega t + \sigma), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} B &= 2A_0 = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \\ \operatorname{tg} \sigma &= -\frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (4.2) остаточно запишемо так:

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_2 = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + \\ &+ \frac{H \cos(\omega t + \sigma)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \end{aligned}$$

де  $C_1$  і  $C_2$  - сталі, що визначаються з початкових умов  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$  - частота згасаючих коливань.

Отже, з наявності в 'язкого тертя котення розглядуваної системи складаються із згасаючих коливань, що відбуваються з частотою  $\omega_1$ , і змущених коливань з частотою збудовувальної сили. Причому згасаючі коливання з

частотою  $\omega_1$  збурюються також за нульових початкових умов ( $t = 0, q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$ ).

Оскільки амплітуда згасаючих коливань через скінченний проміжок часу стає малою порівняно з амплітудою змущених, то практичний інтерес становить розгляд змущених коливань. Вираз (30.89) для амплітуди  $B$  і зсуву фази  $\sigma$  змущених коливань запишемо у вигляді:

$$B = \frac{H}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4z^2 \gamma^2}},$$

$$\operatorname{tg} \sigma = -\frac{2z\gamma}{1 - z^2},$$

де  $z = \frac{\omega}{\omega_0}$  - безрозмірна частота коливань;  $\gamma = \frac{h}{\omega_0}$  безрозмірний коефіцієнт

демпфування. Якщо  $h \ll \omega_0$ , то  $\gamma = \frac{|\ln \eta|}{2\pi}$ .

## Приклад виконання лабораторної роботи

### 4.2 Визначення амплітудно- та фазово- частотних характеристик системи

В даній лабораторній роботі розглянуто коливальну систему, для якої складемо рівняння руху, про інтегруємо його, визначаємо амплітуду і частоту коливань.

**Задача.** На два циліндричних шківів, що обертаються у протилежні сторони, як показано на рис.1, покладено однорідний стержень; центри шківів знаходяться на горизонтальній прямій  $O_1O_2$ ; відстань  $O_1O_2 = 2l$ ; стержень рухається завдяки силам тертя, що прикладені у точках дотику його зі шківів; ці сили пропорційні тиску стержня на шків, причому коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт тертя) дорівнює  $f$ .

**Завдання.** 1) Визначити рух стержня після того, як його зсунули з положення симетрії на відстань  $x_0$  при швидкості  $v_0$ , 2) знайти коефіцієнт тертя  $f$ , знаючи, що період коливань  $T=2c$  стержня при  $l=25\text{см}$ .

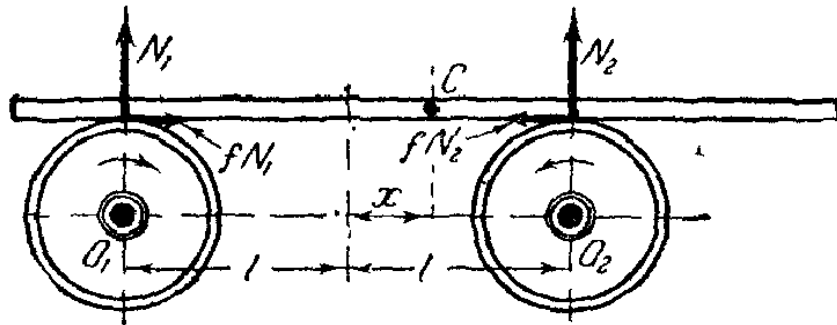
### Схема розв'язання задачі

1. Записуємо умови рівноваги системи тіл. Сума моментів сил відносно центру тяжіння (центру мас) дорівнює нулю:

$$\vec{M}_C(F_i) = \vec{0}. \quad (1)$$

- б) сума реакцій опори стержня дорівнює його вазі:

$$N_1 + N_2 = P. \quad (2)$$



З системи рівнянь (1)-(2) маємо:

$$N_1 = \frac{P(l-x)}{2l}, N_2 = \frac{P}{2l}(x+l) = \frac{N_1(x+l)}{l-x}$$

При  $x_0 > 0$  маємо  $N_2 > N_1$ , а тому рух буде напрямлений у бік, протилежний напрямку вісі  $Ox$ . Враховуючи сказане, можна скласти рівняння руху у проекціях на вісь  $Ox$ :

$$m\ddot{x} = fN_1 - fN_2 = f\left(\frac{P(l-x)}{2l} - \frac{P}{2l}(x+l)\right) = -\frac{fP}{l}x, \text{ отже}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{fP}{l}x, \ddot{x} = -\frac{fg}{l}x$$

Далі, маємо:

$$k^2 = -\frac{fg}{l}, k = \pm i\sqrt{\frac{fg}{l}}$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$x_1 = C_1 \cos\sqrt{\frac{fg}{l}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{fg}{l}}t.$$

Ураховуючи початкові умови, маємо:  $C_1 = x_o, C_2 = 0$ . Остаточно рівняння руху має вигляд:

$$x_1 = x_o \cos \sqrt{\frac{fg}{l}} t.$$

Знайдемо коефіцієнт тертя  $f$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{fg}{l}}}, f = \frac{\pi^2 l}{g} \approx 0.25.$$

Завдання. Вважати, що:  $l = 0.25, x(l) = 0.1m$ . Значення частоти  $f$  взяти з таблиці 4.1. Знайти  $x_o, T$

$$f = 0.25 \cdot (1 + n / 100), l = 0.25, x(l) = 0.1m$$

Таблиця 4.1

| № вар. | $f$ , рад/с | № вар. | $f$ , рад/с |
|--------|-------------|--------|-------------|
| 1      | 0,25        | 11     | 0,4         |
| 2      | 0,3         | 12     | 0,25        |
| 3      | 0,35        | 13     | 0,3         |
| 4      | 0,4         | 14     | 0,35        |
| 5      | 0,45        | 15     | 0,65        |
| 6      | 0,5         | 16     | 0,7         |
| 7      | 0,55        | 17     | 0,04        |
| 8      | 0,6         | 18     | 0,5         |
| 9      | 0,65        | 19     | 0,55        |
| 10     | 0,7         | 20     | 0,6         |

### Контрольні запитання

1. Що називається частотно-фазовою характеристикою системи.
2. Від яких параметрів залежить частота коливальної системи.
3. Як впливають початкові умови на закон руху механічної системи?

## Лабораторна робота №5

### Теоретична частина

#### 5.1 Вільні коливання системи з двома степенями вільності

Вільні (власні) коливання механічної системи з двома степенями вільності

Розглянемо коливання механічної системи, що має два степеня вільності ( $\kappa = 2$ ). Рівняння руху такої системи дістанемо, скориставшись системою рівнянь (30.15):

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + c_{21}q_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Запишемо ці рівняння в операторному вигляді, позначивши через  $p = \frac{d}{dt}$  оператор диференціювання:

$$\begin{cases} (a_{11}p^2 + c_{11})q_1 + (a_{12}p^2 + c_{12})q_2 = 0, \\ (a_{21}p^2 + c_{21})q_1 + (a_{22}p^2 + c_{22})q_2 = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Ці рівняння можна записати також у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} a_{11}p^2 + c_{11} & a_{12}p^2 + c_{12} \\ a_{21}p^2 + c_{21} & a_{22}p^2 + c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (5.3)$$

Оскільки при таких коливаннях немає розсіювання енергії, то вільні коливання будуть незгасаючими і тому (див. § 30.2) [1] можемо покласти  $p = i\omega$  ( $i = \sqrt{-1}$ ). Для того щоб рівняння (30.112) мало нетривіальний розв'язок  $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  треба, щоб визначник матриці коефіцієнтів дорівнював нулю:



$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.4)$$

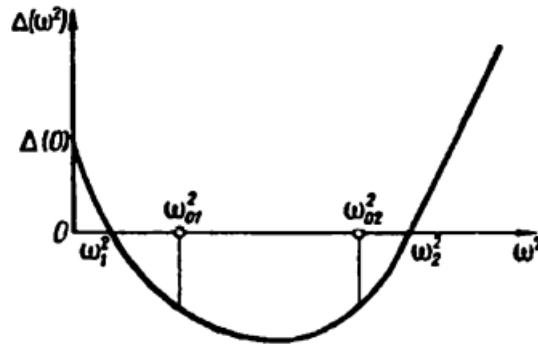


Рис.5.1

Розкриваючи цей визначник і враховуючи, що  $c_{12} = c_{21}$ ;  $a_{12} = a_{21}$ , отримаємо рівняння частот або вікове рівняння:

$$\Delta = (c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0 \quad (5.5)$$

або

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})\omega^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \quad (5.6)$$

Покажемо, що корені рівняння (5.6) відносно  $\omega^2$  дійсні та додатні. Оскільки розглядаємо коливання системи відносно стійкого положення рівноваги, то потенціальна енергія - додатно-визначена квадратична форма узагальнених координат. Кінетична енергія - також додатно-визначена квадратична форма узагальнених швидкостей. Тому за критерієм Сільвестра коефіцієнти в (5.6) при  $\omega^4$  і  $\omega^0$  додатні, тобто

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &> 0, \\ c_{11}c_{22} - c_{12}^2 &> 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Це означає, що графік функції  $\Delta(\omega^2)$  є параболою, гілки якої напрямлені вгору (рис.5.1). При  $\omega^2 = 0$ ,  $\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$ ,  $\omega^2 \rightarrow \infty$ ,  $\Delta(\infty) = \infty$ .

Якщо частота  $\omega^2$  дорівнює квадрату однієї з парціальних частот  $\omega_{01}^2, \omega_{02}^2$  власних коливань,  $\omega_{0s}^2 = \frac{c_{ss}}{a_{ss}} (s=1,2)$ , то  $\Delta(\omega_{0s}^2) < 0$ . (Парціальними називають частоти таких коливань системи, коли коливання за кожною з координат незалежні (незв'язані), тобто коли  $a_{12} = 0, c_{12} = 0$ ).

Із графіка  $\Delta(\omega)$  (рис.5.1) випливає, що обидва корені  $-\omega_1^2, \omega_2^2$  - характеристичного рівняння дійсні та додатні. Цей графік ілюструє також **теорему Релея** про частоти власних коливань системи, згідно з якою: *нижча частота  $\omega_1$ , власних коливань системи завжди менша за найменшу парціальну частоту  $\omega_{01}$ , а вища частота  $\omega_2$  завжди більша за найбільшу парціальну частоту  $\omega_{02}$ .*

Таким чином, у системі з двома степенями вільності вільні коливання відбуваються з частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  власних коливань, тому розв'язок однорідної системи рівнянь (5.2) дорівнюватиме їх лінійній комбінації:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^{(1)} + q_1^{(2)}; \\ q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

або,

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \epsilon_2), \\ q_2 &= B_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \epsilon_2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Якщо підставити вирази (5.9) у (5.2), поклавши в ньому  $p_s = \pm i\omega_s (s=1,2)$  то визначник цієї системи (5.4) обернеться на нуль. Це означає, що з двох рівнянь системи (5.2) незалежне лише одне. Кожному кореню  $\omega_1, \omega_2$  характеристичного рівняння (5.6) відповідають значення амплітуд та фаз за координатами  $q_1, q_2$  і розв'язки лінійно незалежні.

Якщо взяти, наприклад, перше рівняння (5.2), то з нього легко визначити відношення ( $p_s = i\omega_s$ ):

$$\frac{q_2^{(s)}}{q_1^{(s)}} = \frac{B_s}{A_s} = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_s^2}{c_{12} - a_{12}\omega_s^2} = \mu_s, \\ s = 1, 2. \quad (5.10)$$

Отже, кожному значенню частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$  відповідають значення  $\mu_1, \mu_2$ .  
Обчисливши їх за формулою (5.10), визначемо:

$$B_1 = \mu_1 A_1, \quad B_2 = \mu_2 A_2. \quad (5.11)$$

Тепер загальний розв'язок набуде вигляду:

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \\ + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2); \\ q_2 = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \\ + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \quad (5.12)$$

У рівнянні (5.12) частоти  $\omega_1, \omega_2$  і коефіцієнти форм  $\mu_1, \mu_2$  - відомі числа, а  $A_1, A_2$  і  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  довільні сталі, що визначаються з початкових умов. Із формул (5.9) і (5.12) видно, що рух системи з двома степенями вільності складається з двох незалежних коливань:

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1), \\ q_1^{(2)} = A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2); \\ q_2^{(1)} = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1), \\ q_2^{(2)} = \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \quad (5.13)$$

Ці коливання  $(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}; q_1^{(2)}, q_2^{(2)})$ , що відбуваються відповідно з частотою  $\omega_1, \omega_2$  називають **головними коливаннями**. Коефіцієнти  $\mu_1, \mu_2$  визначають **форми коливань**. Вони показують, у скільки разів амплітуда відповідного головного коливання в одній з координат більша (або менша) від амплітуди другої координати.

Колові частоти власних коливань  $\omega_1, \omega_2$ , а також коефіцієнти форм  $\mu_1, \mu_2$  коливань є основними характеристиками малих коливань систем з двома степенями вільності.

## 5.2 Приклад вільних коливань з двома степенями вільності

**Задача.** На абсолютно твердій горизонтальній площині лежать два тіла масами  $m_1, m_2$ . Перше прикріплене до стіни пружиною, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює  $c_1$ . Друге тіло приєднане до першої пружини, коефіцієнт жорсткості якої  $c_2$  (див. рис.1). Записати рівняння руху системи, якщо в положенні, коли обидві пружини не розтягнуті, другому тілу надано швидкості  $V_0$ . Знайти власні частоти системи.

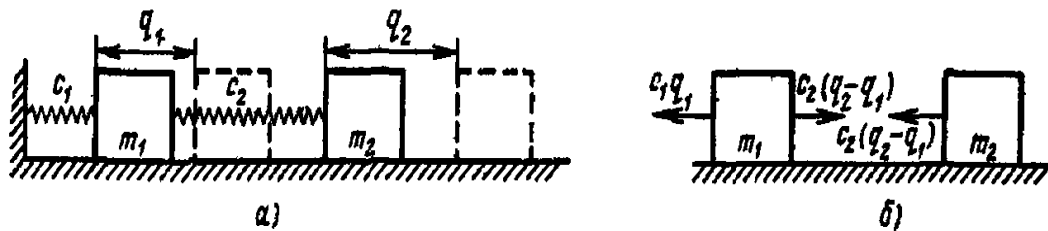


Рис.5.2

Розв'язання.

З умови задачі випливає, що система має два ступеня вільності  $q_1, q_2$ , що відповідають руху тіл масами  $m_1, m_2$  відповідно. Для отримання рівнянь малих коливань системи скористуємось рівняннями Лагранжа, записавши попередньо вираз для кінетичної та потенціальної енергій системи тіл:

$$T = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{q}_2^2}{2}, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{c_1 q_1^2}{2} + \frac{c_2 (q_2 - q_1)^2}{2}, \quad (2)$$

В формулах (1) та (2)  $q_1$  та  $q_2 - q_1$  - подовження першої та другої з пружин відповідно.

Перейдемо до складання диференціальних рівнянь Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (3)$$

де  $i=1,2$  – два ступені вільності. Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= m_1 \dot{q}_1, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= m_1 \ddot{q}_1, & \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1), \end{aligned} \quad (4)$$

то перше диференціальне рівняння прийме вигляд :

$$m_1 \ddot{q}_1 = - c_1 q_1 + c_2 (q_2 - q_1). \quad (5)$$

Так як

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 \dot{q}_2, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) &= m_2 \ddot{q}_2, & \frac{\partial T}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= c_2 (q_2 - q_1), \end{aligned} \quad (6)$$

то друге рівняння руху запишеться:

$$m_2 \ddot{q}_2 = - c_2 (q_2 - q_1). \quad (7)$$

Отже маємо систему двох диференціальних рівнянь (5)-(7), яку треба розв'язати. Шукаємо загальний розв'язок у вигляді:

$$q_1 = B \sin (kt + \alpha), \quad q_2 = D \sin (kt + \alpha). \quad (8)$$

Після підстановки (8) в рівняння (5) та (7), маємо:

$$\begin{aligned} Bk^2 m_1 - Bc_1 + c_2 (D - B) &= 0, \\ Dk^2 m_2 - c_2 (D - B) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Маємо два рівняння із трьома невідомими  $B, D, k$ . Знайдемо відношення амплітуд:

$$\frac{B}{D} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 k^2}, \quad (10)$$

$$\frac{B}{D} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 k^2}, \quad (11)$$

Далі, прирівнявши (10)=(11), отримаємо рівняння для знаходження  $k$ :

$$\frac{c_1 + c_2 - m_1 k^2}{c_2} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 k^2}, \quad (12)$$

$$k^4 - \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) k^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0. \quad (13)$$

Зданого біквadratного рівняння знаходимо частоти:

$$k_{1, 2} = \sqrt{0,5 \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)} \mp \sqrt{0,25 \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}. \quad (14)$$

Маємо таким чином дві частоти:  $k_{1,2}$ . Зважаючи на те, що система рівнянь (5)-(7) є лінійною, загальний розв'язок може бути представлений у вигляді суперпозиції (суми) частинних розв'язків (8) з різними частотами, амплітудами та фазами:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

де

$$q_1 = B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad q_2 = D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) \quad (16)$$

описують перше головне коливання системи, а

$$q_1 = B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad q_2 = D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) \quad (17)$$

описує друге головне коливання.

Завдання. 1. Визначити амплітуди даних коливань  $B_1, B_2, D_1, D_2$  для

початкових умов, зазначених у таблиці 5.1

2. Скласти систему рівнянь, аналогічну рівнянням (5) та (7), для випадку трьох тіл масами  $m_1, m_2, m_3$ , з'єднаних пружинами жорсткістю  $c_1, c_2, c_3$ .

**Таблиця 5.1**

| №<br>вар. | $q_1(0)$ , м | $\dot{q}_1(0)$ ,<br>м/с | $q_2(0)$ ,<br>м | $\dot{q}_2(0)$ | №<br>вар. | $q_1(0)$ , м | $\dot{q}_1(0)$ ,<br>м/с | $q_2(0)$ , м | $\dot{q}_2(0)$<br>м/с |
|-----------|--------------|-------------------------|-----------------|----------------|-----------|--------------|-------------------------|--------------|-----------------------|
| 1         | 0,25         | 1                       | 0,4             | 3              | 11        | 0,4          | 2                       | 0,17         | 5                     |
| 2         | 0,3          | 1,5                     | 0,25            | 4              | 12        | 0,45         | 2,5                     | 0,19         | 9                     |
| 3         | 0,35         | 2                       | 0,3             | 1              | 13        | 0,5          | 3                       | 0,22         | 2                     |
| 4         | 0,4          | 2,5                     | 0,35            | 2,5            | 14        | 0,55         | 4                       | 0,25         | 1                     |
| 5         | 0,45         | 3                       | 0,65            | 3              | 15        | 0,4          | 1                       | 0,3          | 2                     |
| 6         | 0,5          | 4                       | 0,7             | 1              | 16        | 0,25         | 2,5                     | 0,4          | 5                     |
| 7         | 0,55         | 1                       | 0,04            | 1,5            | 17        | 0,3          | 3                       | 0,35         | 4                     |
| 8         | 0,6          | 2,5                     | 0,5             | 2              | 18        | 0,35         | 3,5                     | 0,65         | 7                     |
| 9         | 0,65         | 3                       | 0,55            | 2,5            | 19        | 0,6          | 1,5                     | 0,7          | 6                     |
| 10        | 0,7          | 3,5                     | 0,6             | 3              | 20        | 0,65         | 2                       | 0,04         | 8                     |

### Контрольні питання

1. Від чого залежать частоти коливальної системи з пружністю та масами.
2. Як впливає маса на частоту коливань даної системи.

## Лабораторна робота №6

### Вимушені коливання в системі з двома ступенями вільності

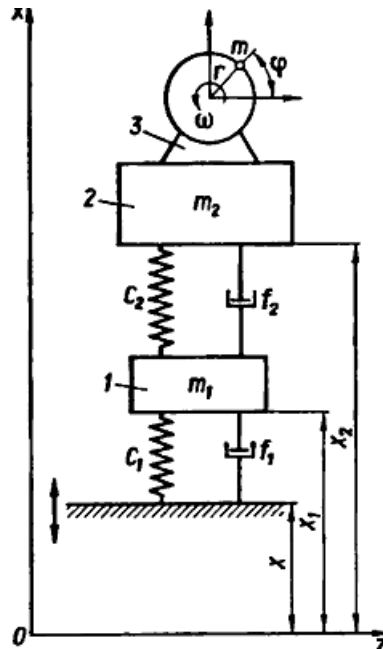


Рис.6.1

#### 6.1 Вимушені коливання механічної системи з двома степенями вільності. Динамічний гаситель коливань.

Змушені коливання системи з двома степенями вільності дослідимо на конкретному прикладі руху двомасової системи за наявності одночасно силового і кінематичного збуджень (рис. 6.1). Поставимо задачу: чи можна вибрати параметри двомасової системи такими, щоб одна з мас була нерухомою під час дії збурення? Звернімося до аналізу рівнянь руху цієї системи, що були складені в § 27.4 (приклад 1 [1]):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (f_2 + f_1) \dot{x}_1 + (c_2 + c_1) x_1 - \\ - c_2 x_2 - f_2 \dot{x}_2 = c_1 x + f_1 \dot{x}, \\ m_2 \ddot{x}_2 + f_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 - f_2 \dot{x}_1 = Q_0. \end{aligned}$$

(6.1)



Тут  $Q_0 = Q \sin \omega t$ , а решта позначень такі самі, як і в § 27.4 [1]. Оскільки в цій системі є розсіювання енергії, то її власні коливання з часом згаснуть. Тому розглядаємо тільки змушені коливання, тобто шукаємо частинний розв'язок системи (30.132), вважаючи, що записані в правій частині збурення ( $x$ -кінематичне,  $Q_0$ -силове) задані.

Розділивши всі частини першого рівняння системи (6.1) на  $m_1$ , а другого - на  $m_2$  і ввівши оператор диференціювання  $p = \frac{d}{dt}$  дістанемо

$$\begin{aligned} & \left( p^2 + 2h_{11}p + \omega_{11}^2 \right) x_1 - \left( 2\mu_m h_2 p + \right. \\ & \quad \left. + \mu_c \omega_{01}^2 \right) x_2 = \left( \omega_{01}^2 + 2h_1 p \right) x, \\ & - \left( 2h_2 p + \omega_{02}^2 \right) x_1 + \left( p^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2h_2 p + \omega_{02}^2 \right) x_2 = Q, \end{aligned} \quad (6.2)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 &= \frac{c_1}{m_1}; \quad \omega_{02}^2 = \frac{c_2}{m_2}; \quad \omega_{11}^2 = \omega_{01}^2 (1 + \mu_c); \\ \mu_m &= \frac{m_2}{m_1}; \quad \mu_c = \frac{c_2}{c_1} = \frac{m_2 \omega_{02}^2}{m_1 \omega_{01}^2}; \quad \mu_f = \frac{f_2}{f_1}; \\ 2h_1 &= \frac{f_1}{m_1}; \quad 2h_2 = \frac{f_2}{m_2}; \\ h_{11} &= h_1 (1 + \mu_f); \quad Q = \frac{Q_0}{m_2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Розв'язуючи рівняння (6.3) відносно  $x_1$  і  $x_2$ , одержимо:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\Delta(p)} \times \\
&\times \begin{vmatrix} (\omega_{01}^2 + 2h_1 p) x & -(2\mu_m h_2 p + \mu_c \omega_{01}^2) \\ Q & (p^2 + 2h_2 p + \omega_{02}^2) \end{vmatrix}, \\
x_2 &= \frac{1}{\Delta(p)} \times \\
&\times \begin{vmatrix} (p^2 + 2h_{11} p + \omega_{11}^2) & (\omega_{01}^2 + 2h_1 p) x \\ -(2h_2 p + \omega_{02}^2) & Q \end{vmatrix},
\end{aligned} \tag{6.4}$$

де

$$\begin{aligned}
\Delta(p) &= \\
&= \begin{vmatrix} p^2 + 2h_{11} p + \omega_{11}^2 & -(2\mu_m h_2 p + \mu_c \omega_{01}^2) \\ -(2h_2 p + \omega_{02}^2) & p^2 + 2h_2 p + \omega_{02}^2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Запишемо  $x_1$  і  $x_2$  у більш розгорнутому вигляді, вважаючи, що збурення  $x$  і  $Q$  - гармонічні функції, які мають однакову частоту  $\omega$ . У цьому разі замість  $p$  можна записати  $p = i\omega, (i = \sqrt{-1})$ . Тоді вираз для  $x_1$  і  $x_2$  набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\Delta(i\omega)} \left[ (\omega_{02}^2 - \omega^2 + 2h_2 i\omega) (\omega_{01}^2 + \right. \\
&\left. + 2h_1 i\omega) x + (\mu_c \omega_{01}^2 + 2\mu_m h_2 i\omega) Q \right],
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
x_2 = & \frac{1}{\Delta(i\omega)} \left[ \left( \omega_{11}^2 - \omega^2 + 2h_{11}i\omega \right) Q + \right. \\
& \left. + \left( 2h_2i\omega + \omega_{02}^2 \right) \left( \omega_{01}^2 + 2h_1i\omega \right) x \right], \\
\Delta(i\omega) = & \left( \omega_{11}^2 - \omega^2 + 2h_{11}i\omega \right) \left( \omega_{02}^2 - \right. \\
& \left. - \omega^2 + 2h_2i\omega \right) - \left( 2h_2i\omega + \omega_{02}^2 \right) \left( \mu_c \omega_{01}^2 + \right. \\
& \left. + 2\mu_m h_2 i\omega \right).
\end{aligned}
\tag{6.6}, (6.7)$$

Проаналізуємо вирази (6.5) і (6.6) для змущених коливань тіл  $1(x_1)$  і  $2(x_2)$ . З аналізу чисельника (6.5) і (6.6) видно, що коли одночасно діють силове  $Q$  і кінематичне  $x$  збудження, то ні при якому співвідношенні між парціальними частотами  $\omega_{01}, \omega_{02}$  і частотою збурення  $\omega$  ні  $x_1$ , ні  $x_2$  на нуль не перетворюються, тобто коливання жодного з тіл не можуть бути погашені. Якщо  $\omega = \omega_{02}$  і  $h_2 = 0$ , то

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, \\
x_2 &= -\frac{\omega_{01}^2 + 2h_1i\omega_{02}}{\mu_c \omega_{01}^2} x.
\end{aligned}
\tag{6.8}$$

Це означає, що при такому співвідношенні параметрів тіло масою  $m_1$  нерухоме, а тіло масою  $m_2$  здійснює коливання згідно з виразом (6.8).

Якщо врахувати, що  $|h_1 \omega_{02}| \ll \omega_{01}^2$  і  $\mu_c = \frac{m_2}{m_1} \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{01}^2} = \frac{c_2}{c_1}$ , то наближено

дістанемо:

$$x_2 \approx \frac{-x}{\mu_c} = -\frac{m_1}{m_2} \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2} x.
\tag{6.9}$$

За звичай масу  $m_2$  вибирають на порядок меншою за масу  $m_1$  ( $m_2 \approx 0,1m_1$ ). Тоді з (6.9) випливає, що оскільки  $\omega_{01}^2$  і  $\omega_{02}^2$  сумірні, то мале тіло масою  $m_2$  має амплітуду коливань приблизно в  $\frac{m_1}{m_2}$  рази більшу за амплітуду збурення.

Фізично ефект динамічного гасіння коливань пояснюється так. На тіло масою  $m_1$  одного боку через пружину  $c_1$ , передається кінематичне збурення, а з другого через пружину  $c_2$  діє тіло масою  $m_2$ . Якщо ці сили однакові за величиною і протилежно напрямлені, то головний вектор сил, прикладених до тіла масою  $m_1$ , дорівнює нулю. Напрямок дії сили можна змінити відповідним зсувом фаз коливань.

При  $h_2 \neq 0$  і  $\omega = \omega_{02}$  і  $x_1 \neq 0$ , але, як і раніше, буде залишатися малим, при цьому амплітуда коливань другого тіла також зменшиться ((6.7) і (6.8)). Характер змінення амплітуди коливань  $A_1$  тіла масою  $m_1$  залежно від частоти збурення зображено на рис.5.2. На рисунку показані парціальні частоти  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  і частоти головних коливань  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$ , що розміщені на осі  $O\omega$  згідно з теоремою Релея (§ 30.9). Залежність  $A_1(\omega)$  зображена суцільною лінією при  $h_2 = 0$  і штриховою при  $h_2 \neq 0$ .

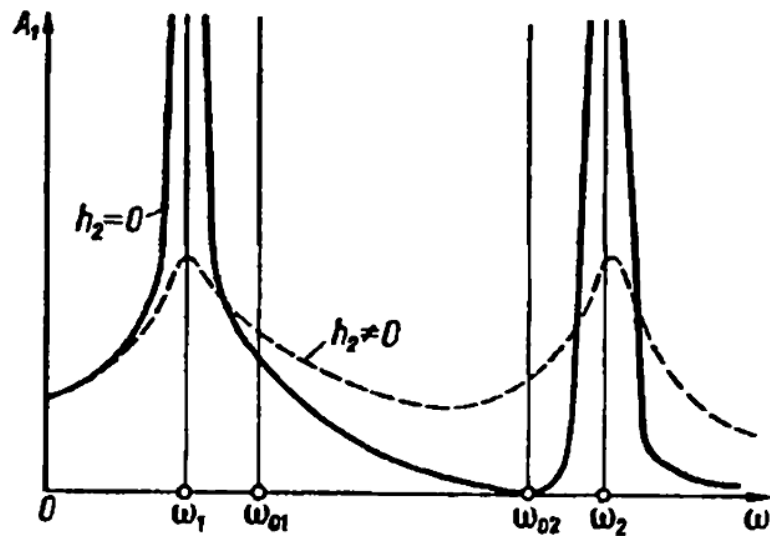


Рис.5.2

2. Розглянемо другий випадок, коли  $x = 0$ , а  $Q \neq 0$ , тобто задано силове збурення розглядуваної двомасової системи. Із виразів (6.5) і (6.6) бачимо, що в цьому випадку  $x_1 \neq 0$  ні при яких співвідношеннях параметрів  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  і  $\omega$ , а  $x_2 = 0$  при  $\omega_{11} = \omega$  і  $h_{11} = 0$ . Отже, коливання описуються виразами:

$$x_1 = \frac{\mu_c \omega_{01}^2 + 2\mu_m h_2 i \omega_{11}}{-(2h_2 i \omega_{11} + \omega_{02}^2)(\mu_c \omega_{01}^2 + 2\mu_m h_2 i \omega_{11})} Q =$$

$$= -\frac{1}{2h_2 i \omega_{11} + \omega_{02}^2} Q, \quad x_2 = 0$$

або враховуючи, що  $|h_2 \omega_{11}| \ll \omega_{02}^2$ :

$$x_1 = -\frac{Q_0}{c_2}, \quad x_2 = 0. \quad (6.10)$$

Як видно з виразу (6.10), тіла 1 і 2 наче міняються ролями. Зауважимо, що одержані тут результати поширюються на коливальні системи з двома степенями вільності будь-якої фізичної природи, наприклад на електричні коливання кола тощо.

## 6.2 Малі коливання подвійного математичного маятника

*Задача.* Дослідити малі коливання подвійного математичного маятника з параметра ми, що вказані на рис.5. 3, а.

*Розв'язання.* Вирази для кінетичної та потенціальної енергії були отримані раніше (§ 27.4). З урахуванням введених тут позначені маємо:

$$T = \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \right.$$

$$\left. + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \right],$$

$$\Pi = (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos \varphi_1) + m g l_2 (1 - \cos \varphi_2) \quad (6.11)$$

Оскільки вивчаються малі коливання відносно положення рівноваги, то в кінетичній енергії замінимо коефіцієнт  $a_{12} = m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  на його значення в положенні рівноваги  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , тобто покладемо наближено:

$$a_{12} = m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \approx m_2 l_1 l_2.$$

Вираз для потенціальної енергії розкладемо в ряд по степеням  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$  і обмежимося величинами другого порядку мализни. Маємо:

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}, \quad \cos \varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}.$$

Отже, вирази для кінетичної та потенціальної енергії матимуть вигляд:

$$T = \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \right],$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \varphi_2^2. \quad (6.12)$$

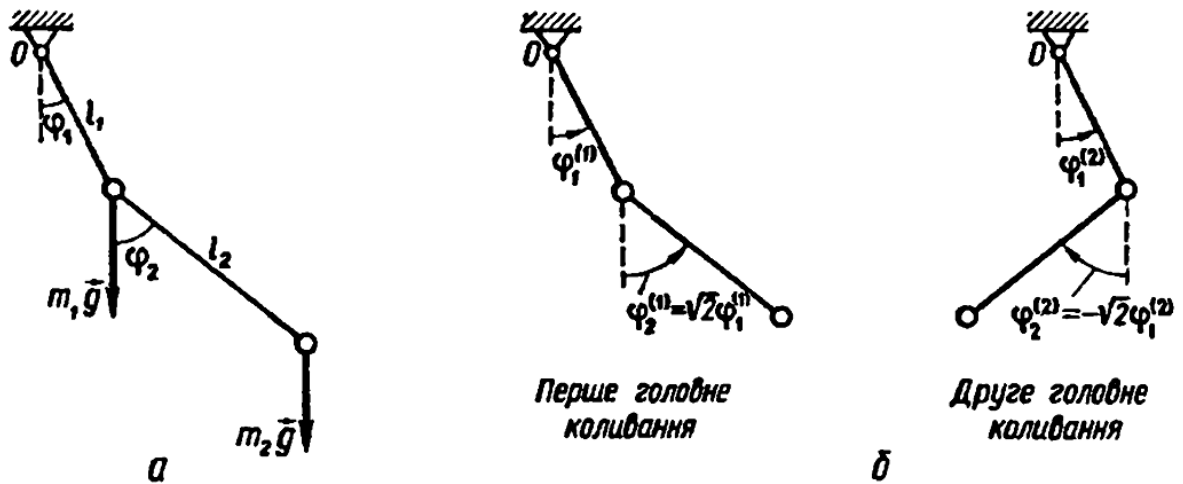


Рис.5.3

Підставивши вираз (2) для  $T$  і  $\Pi$  в рівняння Лагранжа другого роду, отримаємо рівняння малих коливань подвійного математичного маятника, які подамо у формі, скоротивши всі члени в першому рівнянні на  $l_1$ , а в другому - на  $m_2 l_2$ :

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 = 0,$$

$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0. \quad (6.13)$$

Будемо шукати розв'язок у формі:

$$\varphi_1 = A \sin(\omega t + \varepsilon), \quad \varphi_2 = B \sin(\omega t + \varepsilon).$$

Звідси:

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 \varphi_1, \quad \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 \varphi_2.$$

Підставивши  $\varphi_1, \varphi_2, \ddot{\varphi}_1$  і  $\ddot{\varphi}_2$  в рівняння (3), матимемо:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) A - m_2 l_2 \omega^2 B = 0, \\ -l_1 \omega^2 A + (g - l_2 \omega^2) B = 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

Оскільки  $A$  і  $B$  не дорівнюють нулю, то характеристичне рівняння цієї системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) & -m_2 l_2 \omega^2 \\ -l_1 \omega^2 & g - l_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.15)$$

Розкриваючи визначник (6.15), утримаємо

$$\begin{aligned} m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) g \omega^2 + \\ + (m_1 + m_2) g^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Із біквдратного рівняння (6.16) відносно  $\omega^2$  знайдемо вирази для частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , які набудуть досить простого вигляду, коли покласти  $l_1 = l_2 = l$  і  $m_1 = m_2 = m$ , тоді

$$\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}}. \quad (6.17)$$

Зазначимо, що парціальна частота коливань кожного з цих маятників була

б  $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Вираз (6.7) наочно підтверджує теорему Релея.

Знайдемо тепер відношення амплітуд (коефіцієнти форми), користуючись другим рівнянням (6.4):

$$\mu_s = \frac{B_s}{A_s} = \frac{l_1 \omega_s^2}{g - l_2 \omega_s^2} = \frac{l \omega_s^2}{g - l \omega_s^2} = \frac{\omega_s^2}{\omega_{II}^2 - \omega_s^2},$$

$$s = 1, 2. \quad (6.18)$$

Підставивши сюди вирази  $\omega_1$  і  $\omega_2$  із (6.18), матимемо:

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2},$$

$$\mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

$$(6.19)$$

Отже,

$$B_1 = \sqrt{2} A_1, \quad B_2 = -\sqrt{2} A_2. \quad (6.20)$$

Тепер можемо записати загальний розв'язок диференціальних рівнянь (6.13):

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) +$$

$$+ A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2),$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)} = \sqrt{2} A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) -$$

$$- \sqrt{2} A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2).$$

$$(6.21)$$

Сталі інтегрування знаходяться із початкових умов. Нехай, наприклад, при  $t_1 = 0$ :

$$\varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_{20}, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad (6.22)$$



тобто в початковий момент перший маятник займав крайнє нижнє положення, а другий був відхилений на кут  $\varphi_{20}$ . Тоді, здиференціювавши (6.21) і підставивши значення початкових умов в (6.21) і вирази для похідних, знайдемо:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_{20}, \quad A_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_{20},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (6.23)$$

З урахуванням (6.23) вираз (6.21) набере вигляду:

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_{20} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \varphi_{20} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \quad (6.24)$$

Головні коливання визначатимуться із співвідношень:

*перше головне коливання*

$$\varphi_1^{(1)} = A_1 \sin (\omega_1 t + \varepsilon_1),$$

$$\varphi_2^{(1)} = \sqrt{2} A_1 \sin (\omega_1 t + \varepsilon_1); \quad (6.25)$$

*друге головне коливання*

$$\varphi_1^{(2)} = A_2 \sin (\omega_2 t + \varepsilon_2),$$

$$\varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2} A_2 \sin (\omega_2 t + \varepsilon_2). \quad (6.26)$$

Форми коливань зображені на рис. 5.3, б. Якщо в першому головному коливанні перший маятник відхилиться від вертикалі на кут  $\varphi_1^{(1)}$ , а другий відхилиться у той самий бік, але на кут  $\varphi_2^{(1)} = \sqrt{2} \varphi_1^{(1)}$ , то в другому

головному коливанні при відхиленні першого маятника на кут  $\varphi_1^{(2)}$  другий маятник відхилиться в протилежному напрямку на кут  $\varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2}\varphi_1^{(2)}$ .

### 6.3 Завдання для самостійної підготовки

Знайти розв'язок задачі про малі коливання математичного маятника для початкових умов, зазначених у таблиці 6.1

Таблиця 6.1

| № вар . | $\varphi_1(0)$ , рад | $\dot{\varphi}_1(0)$ , рад/с | $\varphi_2(0)$ , м | $\dot{\varphi}_2(0)$ , рад/с | № вар . | $\varphi_1(0)$ , рад | $\dot{\varphi}_1(0)$ , рад/с | $\varphi_2(0)$ , м | $\dot{\varphi}_2(0)$ , рад/с |
|---------|----------------------|------------------------------|--------------------|------------------------------|---------|----------------------|------------------------------|--------------------|------------------------------|
| 1       | 0,2                  | 1,5                          | 0,4                | 3                            | 11      | 0,4                  | 2                            | 0,17               | 5,2                          |
| 2       | 0,3                  | 1,5                          | 0,25               | 1,5                          | 12      | 0,45                 | 2,5                          | 0,19               | 9,1                          |
| 3       | 0,5                  | 2,2                          | 0,4                | 2,2                          | 13      | 0,5                  | 3,2                          | 0,22               | 2,5                          |
| 4       | 0,4                  | 2,5                          | 0,47               | 2,5                          | 14      | 0,55                 | 4,3                          | 0,47               | 1,5                          |
| 5       | 0,47                 | 3,5                          | 0,53               | 3,5                          | 15      | 0,4                  | 1                            | 0,53               | 2,5                          |
| 6       | 0,53                 | 4,2                          | 0,58               | 4,2                          | 16      | 0,25                 | 2,5                          | 0,58               | 5,2                          |
| 7       | 0,58                 | 1,5                          | 0,04               | 3,5                          | 17      | 0,3                  | 3,7                          | 0,62               | 4,3                          |
| 8       | 0,62                 | 2,5                          | 0,5                | 3,8                          | 18      | 0,35                 | 3,9                          | 0,65               | 7,7                          |
| 9       | 0,67                 | 3,5                          | 0,55               | 2,5                          | 19      | 0,6                  | 1,8                          | 0,7                | 6,1                          |
| 10      | 0,73                 | 3,8                          | 0,6                | 3                            | 20      | 0,65                 | 2,9                          | 0,04               | 8,2                          |

### Контрольні питання

1. Рівняння коливань подвійного математичного маятника.
2. Від яких фізичних параметрів залежить період коливання подвійного математичного маятника.
3. Які типи коливань існують для подвійного математичного маятника?

## **Література**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – Київ, Техніка, 2002. – с.510.
2. Павловський М.А., Заплатний В.І. Аналітична механіка. - К.: НМК ВО, 1990. - 144 с.
3. В.В.Воробйов, Л.Д.Воробйова, С.П.Киба. Основи прикладної теорії коливань. –Кременчук-2020,155с.
4. William Turrell Thomson Theory of vibration with applications/-2006,540p.