МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

"НАУКОВА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ-1. ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ"

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за освітньою програмою «Літаки і вертольоти»
спеціальності 134 АВІАЦІЙНА ТА РАКЕТНО-КОСМІЧНА ТЕХНІКА

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Наукова робота за темою магістерської дисертації - 1. Основи наукових досліджень. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 134 «Авіаційна та ракетно-космічна техніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В. В. Кабанячий. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,63 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 147 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 *від* 24.06.2022 *р.)*
за поданням Вченої ради навчально-наукового інституту аерокосмічних технологій (протокол № 5/22 *від* 31.05.2022 *р.)*

Електронне мережне навчальне видання

"НАУКОВА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ-1. ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ"

Практикум

Укладачі: Кабанячий Володимир Володимирович, д-р техн. наук

Відповідальний редактор Сухов В.В. д-р техн. наук, професор

Рецензент Пономаренко С. О., кандидат техн. наук, с.н.с., в. о. завідувача кафедри систем керування літальними апаратами

У навчальному посібнику викладено теоретичні відомості, методичні матеріали та вихідна інформація для виконання практичних занять з курсу «Наукова робота за темою магістерської дисертації - 1. Основи наукових досліджень». У посібнику приділено увагу характеристикам і аналізу одномірних й багатомірних випадкових величин, повному і дробному факторним експериментам, плануванню екстремальних пошукових експериментів.

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня магістра за спеціальністю 134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка. Він може бути також корисним для здобувачів ступеня магістра інших технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

Загальні методичні вказівки

У процесі вивчення курсу «Наукова робота за темою магістерської дисертації - 1. Основи наукових досліджень» студент повинен не лише засвоїти теоретичний матеріал, але й отримати теоретичні й практичні знання щодо методології та методики наукових досліджень, планування та організації наукових досліджень, методів аналізу та прийняття рішень за результатами досліджень. Зокрема, це дозволить їм самостійно ставити та творчо вирішувати різні складні питання наукових досліджень.

В аналізі й висновках підводять підсумки проведених розрахунків. Їх формулюють у вигляді окремих лаконічних і, головне, конкретних положень, які підсумовують результати проведених розрахунків. В аналіз й висновки можуть бути включені узагальнені цифрові дані. Висновки повинні містити відповідь на питання, які були сформульовані у меті практичного заняття.

Виконання практичних занять вимагає наявності у студентів навичок користування персональними комп'ютерами, які здобуваються у процесі засвоєння шкільної та загальнотеоретичної університетської програм.

Студент допускається до проведення наступного практичного заняття лише у тому випадку оформлення протоколу попереднього практичного заняття і вивчення детально поточного практичного заняття.

Метою практичних занять є опанування методології та особливостей виконання розрахунків щодо різних аспектів наукових досліджень.

Переважним для практичного заняття є його виконання у спеціалізованому класі, обладнаному персональними комп’ютерами.

На кожне практичне заняття виділяється по 2 навчальні години. Крім того, підготовча частина роботи виконується студентами вдома, у процесі підготовки до чергової навчальної пари.

Практична робота №1

ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ Й ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ОДНОМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета роботи – *вивчення основних понять теорії ймовірностей, ознайомлення з основними характеристиками одномірних випадкових величин і можливими способами їхнього експериментального визначення.*

1.1 Елементи теорії ймовірностей

Випадковою величиною називається така величина, значення якої змінюється при повторенні випробувань деяким, заздалегідь не передбачуваним, чином. На відміну від невипадкових, детермінованих величин для випадкової величини не можна заздалегідь точно сказати, яке конкретно значення вона прийме у певних умовах, а можна лише вказати закон її розподілу. Закон розподілу вважається заданим, якщо:

1) вказано множину можливих значень випадкової величини;

2) вказано спосіб кількісного визначення імовірності потрапляння випадкової величини у будь-яку область множини можливих значень.

Імовірність потрапляння в задану область може бути визначена таким чином:

$$p_m = \lim_{N \to \infty} \frac{N_m}{N}, \qquad (1.1)$$

де N_m – кількість спостережень випадкової величини, що потрапили у задану область;

N – загальне число спостережень (частотне визначення імовірності).

Аналітичними виразами законів розподілу випадкових величин є функції розподілу ймовірностей – інтегральна і диференціальна.

Інтегральна функція розподілу *F(x)* випадкової величини *X* показує імовірність того, що випадкова величина не перевищує деякого заданого або поточного значення x, тобто (через P зазвичай позначається оператор імовірності, а через p – конкретна величина імовірності.) $F(x) = P\ \{X \leq x\}$. Отже, імовірність того, що значення випадкової величини X міститься між x_1 і x_2, дорівнює різниці значень функцій розподілу, обчислених у цих двох точках:

$$P\ \{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_1) - F(x_2). \quad (1.2)$$

Аналогічно,

$$P\ \{X > x\} = 1 - F(x). \qquad (1.3)$$

Інтегральна функція розподілу випадкової величини має X такі властивості:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \mathrm{F}(-\infty) = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$;

3) $F(x) \geq 0 - \infty > \mathrm{x} > \infty$;

4) $F(x_2) \geq F(x_1) |\ x_2 > x_1$.

Надалі будуть розглядатися лише безперервні випадкові величини, область можливих значень яких містить усі точки з деякого інтервалу. Для такої величини можливий вигляд функції розподілу *F(x)* зображено на рис. 1.1.

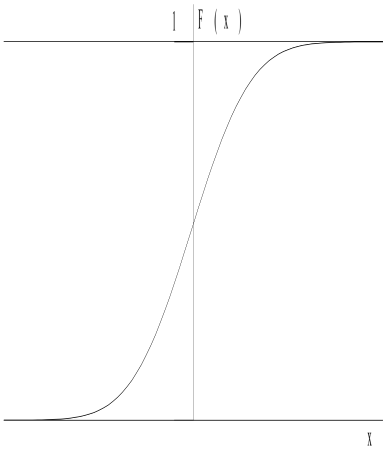


Рис.1.1 Функція розподілу *F(x)*

Якщо функція *F(x)* диференційована для всіх значень випадкової величини *X*, то закон розподілу ймовірностей може бути представлений в аналітичній формі також за допомогою *диференціальної функції* розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x\}}{\Delta x} (\Delta x > 0). \quad (1.4)$$

Таким чином, значення функції $f(x)$ приблизно дорівнює відношенню імовірності потрапляння випадкової величини в інтервал $(x, x + \Delta x)$ до довжини Δx цього інтервалу, коли Δx – нескінченно мала величина. Тому функція $f(x)$ називається також *функцією щільності розподілу ймовірностей* (або коротше – *функцією щільності ймовірності*).

Головні властивості функції $f(x)$:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$;

3) $\int_{-\infty}^{x} f(z)dz=F(x)$;

$$4)\ \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$$

(z – змінна інтегрування).

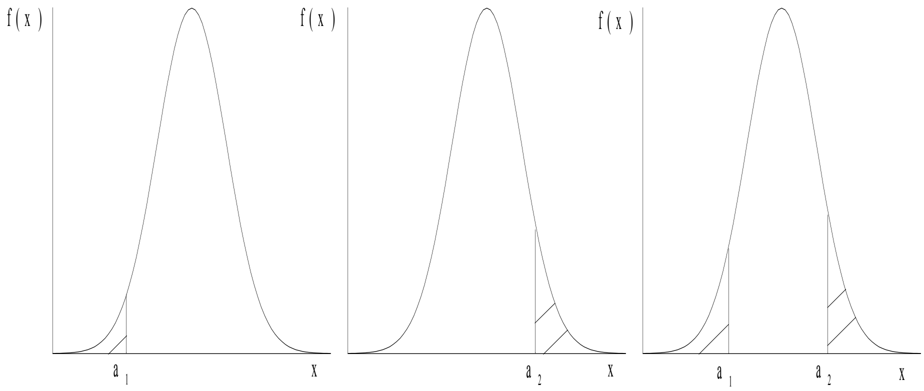
За допомогою диференціальної функції розподілу обчислюється імовірність знаходження випадкової величини у будь-якій області з множини її можливих значень. Зокрема,

$$P\{X \le a_1\} = \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\mathrm{dx}, P\{X > a_2\} =$$
$$= \int_{a_2}^{\infty} f(x)\mathrm{dx}, P\{a_1 X \le a_2\} = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{dx}. \ (1.5)$$

Для безперервної випадкової величини імовірність можна визначити як відносну частку площі під кривою щільності розподілу ймовірностей $f(x)$. Так, наприклад, імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше a_1, дорівнює відносній частці площі під кривою $f(x)$ зліва від точки a_1 (рис. 1.2, а); імовірність того, що ця величина X прийме значення, більше a_2, дорівнює відносній частці площі під кривою $f(x)$ справа від точки a_2 (рис. 1.2, б); імовірність того, що вона прийме значення, розміщене між a_1 і a_2, дорівнює відносній частці площі під кривою $f(x)$ між точками a_1 і a_2 (рис. 1.2, в).

Як інтегральна, так і диференціальна функції розподілення є вичерпними ймовірнісними характеристиками випадкової величини. Однак деякі головні властивості випадкових величин можуть бути описані простіше за допомогою певних числових параметрів. Найбільше значення серед них на практиці мають два параметри, що характеризують центр розсіювання (центр розподілу) випадкової величини і степінь її розсіювання навколо цього центру. Найпоширенішою характеристикою центру розподілу є *математичне очікування* m_x випадкової величини X (часто називається також *генеральним середнім значенням*):

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\mathrm{f}(x)\mathrm{dx}. \quad (1.6)$$



а) б) в)

Рис. 1.2 Щільності розподілу ймовірностей *f*(*x*)

Степінь розсіювання випадкової величини *X* відносно m_x може бути охарактеризована за допомогою *генеральної дисперсії* σ_x^2:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\mathrm{dx}. \quad (1.7)$$

Якщо *f*(*x*) усе у більшої степені концентрується поблизу m_x, то значення σ_x^2 зменшуються. Якщо ж є дуже віддалені від m_x значення випадкової величини *X* і для них *f*(*x*) не занадто мала, то дисперсія σ_x^2 збільшується. Квадратний корінь із дисперсії σ_x^2 називається середнім квадратичним відхиленням σ_x.

1.2 Експериментальний аналіз одномірної випадкової величини

Нехай є набір (вибірка) експериментальних даних x_1, x_2, …, x_n. Обробку цих даних для отримання емпіричних характеристик одномірного випадкової величини здійснюється зазвичай у такій послідовності.

1^0. Побудова варіаційного ряду (ряду розподілу). Варіаційний ряд z_1, z_2, …, z_n отримується з вихідних даних шляхом розташування x_m (m = 1, 2, …, N) у порядку зростання від x_{min} до x_{max} так, щоб $x_{min} = z_1 \leq z_2 \leq ... \leq z_n = x_{max}$.

Нехай, наприклад, є 5 спостережень: $x_1 = 5$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x_4 = 5$; $x_5 = 7$. Тоді їм відповідає варіаційний ряд: $z_1 = 2$; $z_2 = 4$; $z_3 = 4$; $z_4 = 5$; $z_5 = 7$.

2^0. Побудова діаграми накопичених частот $\hat{F}_N(x)$, що є емпіричним аналогом інтегрального закону розподілу. Діаграма будується відповідно до формули:

$$\hat{F}_N(x) = \sum_{j=1}^{\mu_N(x)} \frac{1}{N}, \tag{1.8}$$

де $\mu_N(x)$ – число елементів у вибірці, для яких значення $x_j < x$.

Практично це здійснюється так. На осі абсцис указується значення спостережень x_m (або z_l). Значення за віссю ординат дорівнює нулю лівіше точки x_{min}; у точці x_{min} і далі в усіх інших точках x_m діаграма має стрибок, що дорівнює $1/N$. Якщо існує декілька значень x_m, що збігаються, то у цьому місці на діаграмі відбувається стрибок, що дорівнює λ/N, де λ – кількість точок, що збігаються. Ясно, що для величин $x > x_{max}$ значення діаграми накопичених частот дорівнює 1. Відзначимо, що якщо $N \to \infty$, то $\hat{F}_N(x) \to F(x)$.

Використовуючи дані попереднього прикладу, побудуємо відповідну діаграму (рис. 1.3).

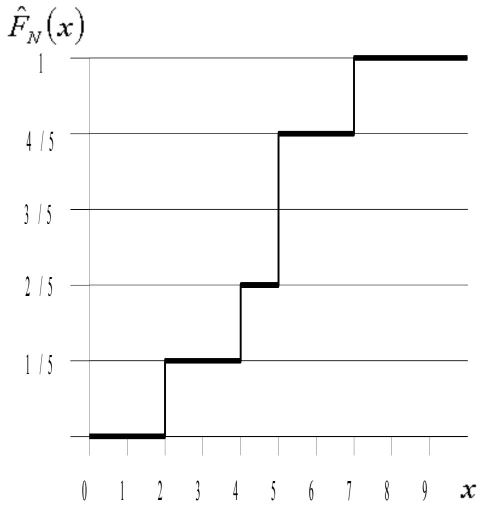


Рис. 1.3 Діаграма накопичених частот

3^0. Побудова гістограми вибірки. Гістограма $\hat{f}_N(x)$ є емпіричним аналогом функції розподілу $f(x)$. Зазвичай вона будується таким способом:

1. Знаходиться попередня кількість квантів (інтервалів), на які повинна бути розбита вісь Ox. Ця кількість K визначається за допомогою оцінної формули:

$$K = 1 + 3{,}21 \lg N, \qquad (1.9)$$

де знайдене значення округлюється до найближчого цілого числа.

2. Визначається довжина інтервалу:

$$\Delta x = (x_{\max} + x_{\min})/K. \qquad (1.10)$$

Величину Δx можна дещо округлити для зручності обчислень.

3. Середина області зміни вибірки (центр розподілу) $(x_{\max} + x_{\min})/2$ приймається за центр деякого інтервалу, після чого легко знаходяться межі й остаточна кількість зазначених інтервалів так, щоб у сукупності вони перекривали всю область від $x_{\min}$ до $x_{\max}$.

4. Підраховується кількість спостережень N_m, що потрапили у кожний квант: N_m дорівнює числу членів варіаційного ряду, для котрих справедлива нерівність:

$$x_m \le z_l < x_m + \Delta x, \qquad (1.11)$$

де x_m і $x_m + \Delta x$ – межі m-го інтервалу. Відзначимо, що при використанні формули (1.9) значення z_l, що потрапили на межу між (m - 1)-м і m-м інтервалами, зараховують до m-го інтервалу.

5. Підраховується відносна кількість (відносна частота) спостережень N_m/N, що потрапили у даний квант.

6. Будується гістограма, що представляє собою східчасту криву, значення якої на m-м інтервалі (x_m, $x_m + \Delta x$) ($m=\overline{1,K}$) постійно і дорівнює N_m/N, або з урахуванням умови $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(z)\,dz=1$ дорівнює $(N_m/N)/\Delta x$.

Нехай, наприклад, є вибірка з 40 спостережень, а відповідний їй варіаційний ряд має вигляд: $x_{min} = z_1 = 0{,}3$; $z_2 = 0{,}4$; … ; $z_{40} = x_{max} = 7{,}1$...

За формулою (1.9) отримуємо: $K = 1 + 3{,}2*\lg 40 = 1 + 3{,}2*1{,}602 = 6{,}13$; приймаємо $K = 7$. Тоді: $\Delta x = (7{,}1 — 0{,}3)/7 = 0{,}971$; вибираємо $\Delta x = 1$. Знаходимо: $(x_{max} + x_{min})/2 = (0{,}3 + 7{,}1)/2 = 3{,}7$, після чого легко визначаються межі інтервалів (рис. 1.4). Припустимо, після такої розбивки з'ясувалося, що у перший інтервал потрапило два значення x_i: $N_1 = 2$; у другий – чотири: $N_2 = 4$; у інші: $N_3 = 9$; $N_4 = 13$; $N_5 = 8$; $N_6 = 3$; $N_7 = 1$. Відповідна гістограма зображена на рис. 1.4.

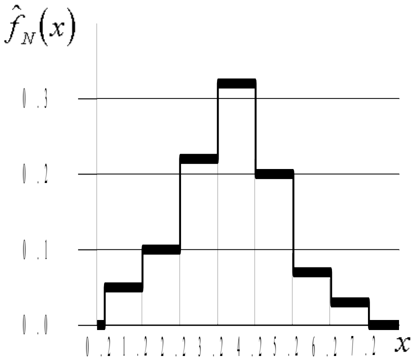


Рис. 1.4 Гістограма вибірки

4^0. Визначення оцінок математичного очікування $\bar{x}$, дисперсії s_x^2 і середнього квадратичного відхилення s_x здійснюється за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \qquad (1.12)$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2, \qquad (1.13)$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}. \qquad (1.14)$$

Необхідно відзначити, що множник 1/(N-1) (замість 1/N) у формулі (1.13) уводиться для отримання незміщеної оцінки дисперсії.

1.3 Порядок виконання роботи

1. Отримати у викладача вибірку одномірної випадкової величини.
2. Побудувати варіаційний ряд.
3. За допомогою варіаційного ряду побудувати діаграму накопичених частот.
4. Побудувати гістограму вибірки.

5. Розрахувати за формулами (1.12)-(1.14) оцінки математичного очікування, дисперсії й середнього квадратичного відхилення випадкової величини.

1.4 Контрольні запитання

1. Дати визначення випадкової величини.
1. Дати визначення одномірного інтегрального й диференційного законів розподілення випадкової величини й назвати їхні властивості.
2. Які числові параметри найчастіше використовуються як міри розташування й розсіяння одномірної сукупності випадкової величини?
3. Яким чином здійснюється побудова варіаційного ряду, діаграми накопичених частот, гістограми вибірки одномірної випадкової величини?

Таблиця 1.1

Вибірка однорідної випадкової величини

Номер	Варіант						
	1	2	3	4	5	6	7
1	11,0	16,8	30,8	41,6	52,0	75,6	93,4
2	4,6	10,8	19,4	23,8	29,0	42,6	54,4
3	10,4	11,8	18,6	25,2	31,4	44,4	56,6
4	4,8	10,6	18,0	24,8	27,6	44,6	55,0
5	10,0	15,2	38,0	41,0	48,6	69,4	87,6
6	5,2	8,8	15,0	19,0	23,8	36,8	48,0
7	11,2	17,0	31,4	43,4	53,4	77,6	96,4
8	4,6	8,6	15,6	19,8	24,4	36,6	45,2
9	10,0	9,0	30,8	40,4	47,2	75,0	97,4
10	7,8	15,8	25,8	32,4	40,4	68,0	91,0
11	3,4	9,0	13,8	19,0	22,0	38,6	51,4
12	5,6	9,2	17,0	22,6	28,2	48,4	67,2
13	4,2	8,2	14,8	19,4	25,0	44,0	64,0
14	3,8	6,8	12,4	17,4	22,2	41,0	56,4
15	4,0	7,0	11,8	17,2	21,4	39,4	53,0
16	7,4	6,8	13,0	17,2	19,6	36,4	50,6
17	4,2	12,4	20,6	27,8	33,0	57,8	79,4
18	4,6	9,2	13,6	18,8	22,6	39,0	50,0
19	6,0	10,4	15,8	21,8	24,4	41,4	50,2
20	5,0	9,6	15,2	19,8	24,4	39,6	52,0
21	3,8	8,8	16,4	22,4	25,6	42,6	54,6
22	8,8	14,6	25,0	34,4	43,2	61,2	74,6
23	4,2	18,4	31,2	40,8	51,6	80,6	101,6
24	4,8	7,6	15,0	20,6	24,0	33,2	43,2

Таблиця 1.1 (продовження)

Вибірка однорідної випадкової величини

Номер	Варіант						
	8	9	10	11	12	13	14
1	4,6	8,8	15,0	19,0	23,8	36,8	48,0
2	4,6	10,8	19,4	23,8	29,0	42,6	54,4
3	5,2	11,8	18,6	25,2	31,4	44,4	56,6
4	8,8	14,6	25,0	34,4	43,2	61,2	74,6
5	10,0	15,2	38,0	41,0	48,6	69,4	87,6
6	10,4	16,8	30,8	41,6	52,0	75,6	93,4
7	11,2	17,0	31,4	43,4	53,4	77,6	96,4
8	11,0	18,4	31,2	40,8	51,6	80,6	101,6
9	10,0	9,0	30,8	40,4	47,2	75,0	97,4
10	7,8	15,8	25,8	32,4	40,4	68,0	91,0
11	7,4	12,4	20,6	27,8	33,0	57,8	79,4
12	5,6	9,2	17,0	22,6	28,2	48,4	67,2
13	4,2	8,2	14,8	19,4	25,0	44,0	64,0
14	3,8	6,8	12,4	17,4	22,2	41,0	56,4
15	4,0	7,0	11,8	17,2	21,4	39,4	53,0
16	3,4	6,8	13,0	17,2	19,6	36,4	50,6
17	4,2	9,0	13,8	19,0	22,0	38,6	51,4
18	4,6	9,2	13,6	18,8	22,6	39,0	50,0
19	6,0	10,4	15,8	21,8	24,4	41,4	50,2
20	5,0	9,6	15,2	19,8	24,4	39,6	52,0
21	4,8	8,8	16,4	22,4	25,6	42,6	54,6
22	4,8	10,6	18,0	24,8	27,6	44,6	55,0
23	4,2	8,6	15,6	19,8	24,4	36,6	45,2
24	3,8	7,6	15,0	20,6	24,0	33,2	43,2

Таблиця 1.1 (продовження)

Вибірка однорідної випадкової величини

Номер	Варіант						
	15	16	17	18	19	20	21
1	2,2	4,0	7,8	11,4	12,8	17,4	21,2
2	2,6	5,6	9,6	11,2	13,8	18,8	24,2
3	2,6	5,8	9,6	12,8	15,0	20,8	25,4
4	2,4	5,6	8,8	12,4	15,4	20,2	25,0
5	3,2	7,0	11,8	17,0	20,2	28,8	32,4
6	3,8	6,4	14,0	18,0	20,6	29,2	34,2
7	3,4	6,8	13,8	18,2	23,0	32,6	38,4
8	3,8	6,4	13,6	19,2	22,2	32,6	39,0
9	4,0	8,0	14,4	19,2	24,2	35,6	41,4
10	4,4	9,8	15,8	19,4	22,4	33,8	41,4
11	4,2	9,4	15,2	18,2	21,6	32,0	39,6
12	4,6	9,2	14,2	17,6	19,2	29,8	37,8
13	3,6	5,8	9,4	13,2	15,4	24,4	32,6
14	2,2	5,2	9,2	11,0	14,0	23,2	31,6
15	1,8	3,6	8,0	10,6	12,8	23,2	30,4
16	2,4	4,2	6,6	10,2	12,2	22,6	28,8
17	1,6	3,6	7,2	10,2	11,2	21,2	27,0
18	2,2	5,6	8,6	11,4	12,4	20,8	26,4
19	2,2	5,2	8,2	11,6	13,8	21,4	25,8
20	3,0	5,4	8,6	12,4	13,6	22,2	26,6
21	2,8	4,6	8,0	11,6	14,2	22,0	28,9
22	2,6	4,4	8,6	12,2	14,2	22,8	26,8
23	2,0	5,0	9,2	13,0	14,0	22,6	26,8
24	2,0	6,4	10,4	13,2	15,2	21,2	23,6

Таблиця 1.1 (продовження)

Вибірка однорідної випадкової величини

Номер	Варіант						
	22	23	24	25	26	27	28
1	0,3	0,3	0,4	0,8	1,3	2,6	3,2
2	0,2	0,3	0,4	1,7	2,7	1,9	2,5
3	0,3	0,6	1,0	2,2	3,5	2,6	3,9
4	0,4	0,9	1,9	2,5	3,9	5,2	7,1
5	1,1	1,5	2,6	4,4	6,0	5,2	6,5
6	1,8	2,8	3,6	6,1	7,9	4,5	7,1
7	1,7	2,6	3,8	7,0	8,6	4,5	7,1
8	1,7	2,9	4,2	6,9	9,1	5,8	7,7
9	1,7	2,5	3,6	6,6	9,3	5,2	7,1
10	1,2	2,2	3,0	5,8	8,6	3,2	5,1
11	0,4	0,8	1,6	4,5	7,2	1,9	3,2
12	0,2	0,4	0,9	3,1	5,5	1,3	1,9
13	0,1	0	0,7	2,2	3,7	0	0,6
14	0,1	0,2	0,4	1,3	3,4	0	0,6
15	0	0	0,4	1,3	2,2	0	0,6
16	0,1	0,2	0,5	1,4	1,9	0	0
17	0,1	0,2	0,3	1,2	1,9	0	0
18	0,1	0	0,4	1,1	1,9	0,6	1,2
19	0,1	0,3	0,5	1,1	1,4	1,3	1,3
20	0,3	0,4	0,6	1,5	1,9	1,3	1,9
21	0,3	0,3	0,4	1,1	1,5	1,3	3,2
22	0,3	0,3	0,5	1,6	2,2	1,9	3,8
23	0,4	0,5	0,6	1,7	2,1	2,6	3,9
24	0,3	0,3	0,3	1,1	1,8	2,6	3,9

Практична робота №2

ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ Й ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ БАГАТОМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета роботи – *вивчення основних понять теорії ймовірностей, ознайомлення з основними характеристиками багатомірних випадкових величин і можливими способами їхнього експериментального визначення*.

2.1 Елементи теорії ймовірностей

Часто-густо для опису практичної ситуації виявляється необхідним використання одночасно декількох (у найпростішому випадку – двох) випадкових величин. Для завдання ймовірнісних властивостей двох випадкових величин X, Y використовуються двомірні (сумісні) функції розподілу ймовірностей: інтегральна $F(x, y)$ і диференціальна $f(x, y)$. Функція $F(x, y)$, що характеризує імовірність того, що перша випадкова величина приймає деяке значення, менше або дорівнює x, а друга – значення, менше або дорівнює y, називається *інтегральною функцією* спільного розподілу двох випадкових величин:

$$F(x, y) = P\{X \le x;\ Y \le y\}. \qquad (2.1)$$

Як і для однієї безперервної випадкової величини, якщо функція $F(x, y)$ достатньо гладка, то її можна диференціювати, у наслідок чого утвориться двомірна *диференціальна функція* розподілу ймовірностей (двомірна щільність імовірності):

$$f(\mathrm{x,y}) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(\mathrm{x,y}). \qquad (2.2)$$

Функція *f(x, y*) має такі властивості:

1) $f(\mathrm{x,y}) \geq 0$;

2) $\int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{x,y})\mathrm{dxdy}=1$;

3) $F(\mathrm{x,y}) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(z_1,\mathrm{z}_2)\, \mathrm{dz}_1\mathrm{dz}_2$;

4) $\lim\limits_{\substack{|x| \to \infty \\ |y| \to \infty}} f(\mathrm{x,y}) = 0$

(z_1, z_2 – змінні інтегрування).

Ймовірність того, що випадкові величини *X*, *Y* одночасно потраплять у деяку довільну область *Ω*, складає:

$$P\{(\mathrm{X,Y}) \in \Omega\} = \iint_{\Omega} f(\mathrm{x,y})\mathrm{dxdy}. \qquad (2.3)$$

Зокрема,

$$P\{a_1 < \mathrm{X} \leq a_2; \mathrm{b}_1 < \mathrm{Y} \leq b_2\} = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(\mathrm{x,y})\mathrm{dxdy}. \qquad (2.4)$$

За відомою двомірною щільністю *f(x, y*) легко знайти *часткові (одно-мірні) функції розподілу f(x)*, *f(y*) кожної випадкової величини:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{x,y})\mathrm{dy}, f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{x,y})\mathrm{dx}. \qquad (2.5)$$

Дві випадкові величини *X* і *Y* називаються *незалежними*, якщо

$$f(x, y) = f(x)\, f(y). \qquad (2.6)$$

Як і в одномірному випадку, головні властивості двомірної сукупності величин X, Y можуть бути охарактеризовані за допомогою низки числових параметрів. При цьому в якості найвживаніших параметрів, що описують поведінку кожної з випадкових величин окремо, як і вище, використовуються математичне очікування і дисперсія відповідної випадкової величини: m_x, m_y, σ_x^2, σ_y^2. Крім подібного роду параметрів для двомірної сукупності можуть бути побудовані параметри, що характеризують степінь взаємозалежності змінних X і Y. Найпростішими з них є *коваріація* двох випадкових величин (називається також *кореляційним моментом*):

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)\,(y - m_y) f(x,y)\,dxdy, \qquad (2.7)$$

а також нормований показник зв'язку – *коефіцієнт кореляції*:

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}. \qquad (2.8)$$

За своїм фізичним змістом коефіцієнт кореляції є далеко не вичерпною характеристикою статистичного зв'язку, характеризуючи лише степінь лінійної залежності між X і Y. Коефіцієнт кореляції змінюється в межах $-1 \le \rho_{xy} \le 1$. Якщо $\rho_{xy} = 1$, то випадкові величини цілком позитивно корельовані, тобто $y = a_0 + a_1 x$, де a_0 і a_1 – постійні, причому $a_1 > 0$. Якщо ж $\rho_{xy} = -1$, то випадкові величини цілком негативно корельовані, тобто $y = a_0 - a_1 x$. Якщо $\rho_{xy} = 0$, то кажуть, що випадкові величини X і Y не корельовані: $a_1 = 0$. У тому випадку, коли X і Y – незалежні випадкові величини, для них $\rho_{xy} = 0$; отже, вони й не корельовані. Зворотне твердження в загальному випадку невірне: X і Y можуть бути пов'язані навіть функціонально й усе ж мати нульовий коефіцієнт кореляції (при цьому, звичайно, функціональний зв'язок повинен бути нелінійним).

Всі описані вище функції і пов'язані з ними параметри є теоретичними, що характеризують певні властивості досліджуваного об'єкта. На практиці майже завжди ці характеристики невідомі й виникає задача експериментального (емпіричного) визначення тих або інших характеристик випадкових величин на підґрунті спостережень.

2.2 Експериментальний аналіз двомірної сукупності

Нехай отримана вибірка з двомірної сукупності при спостереженні двох випадкових величин X і Y (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

i	1	2	3		i		N
X	x_1	x_2	x_3		x_i		x_N
Y	y_1	y_2	y_3		y_i		y_N

Обробку результатів спостережень у даному випадку можна здійснювати за такою схемою:

1^0. Побудова поля розсіювання, як правило, перший крок при обробці результатів спостережень двомірної сукупності випадкових величин X, Y; для цього на площині з координатами x, y відзначаються експериментальні точки. Можливий вид такого поля зображений на рис. 2.1.

Рис. 2.1 Поле розсіювання

2^0. Складання таблиці двомірного розподілу. Ця таблиця складається таким чином. Осі Ох і Оу розбиваються на окремі інтервали довжиною Δx і Δy. Величини Δx і Δy, кількість K_x, K_y (зазвичай $K_y = K_x = K$, тому що кількість точок N спільна для X і Y) і розміщення цих інтервалів для кожної зі змінних X і Y знаходиться за допомогою правил, викладених вище. Відповідні межі наносяться на діаграму розсіювання (рис. 2.1) і потім підраховується кількість точок $N_{m1,m2}$, що потрапили в кожний з прямокутників, що утворилися, (за умови, що якщо будь-яка точка розташована на межі, то її відносять до правого або верхнього прямокутника). Далі складається таблиця (табл. 2.2). У цій таблиці відмічаються величини $N_{m1,m2}$, а також відносні величини $N_{m1,m2}/N$ (нижче діагоналі) (числові дані у табл. 2.2 отримані за допомогою рис. 2.1). Подібну таблицю можна використовувати як вихідну для побудови гістограм і діаграм накопичених частот у тримірному просторі, що є емпіричними аналогами двомірного інтегрального закону і двомірної функції розподілу.

Слід зазначити, що за допомогою таблиці двомірного розподілу легко отримати вихідні дані для побудови гістограм, що відповідають кожній з одномірних випадкових величин X і Y. Для цього достатньо просумувати значення таблиці або за кожним стовпчиком (при побудові гістограми для Y), або за кожним рядком (при побудові гістограми для X).

Таблиця 2.2

$X\backslash Y$	$(y_1, y_1+\Delta y)$	$(y_2, y_2+\Delta y)$	…	$(y_{m2}, y_{m2}+\Delta y)$	…	$(y_{k2}, y_{k2}+\Delta y$
$(x_1, x_1+\Delta x)$	0		…		…	1
	0					1/40
$(x_2, x_2+\Delta x)$	0		…		…	
	0					
...	…	…	…	…	…	…
			…	$N_{m1,m2}$	…	
$(x_{m1}, x_{m1}+\Delta x)$				$N_{m1,m2}/N$		
...	…	…	…	…	…	…
$(x_{k1}, x_{k1}+\Delta x)$	1	1	…		…	
	1/40	1/40				

3[0]. Розрахунок оцінки коефіцієнта кореляції здійснюється за формулою:

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{1}{(N-1)s_x s_y}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}), \qquad (2.9)$$

де $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x, s_y знаходяться за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2,$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}.$$

Слід зазначити, що між значенням і знаком коефіцієнта кореляції, з одного боку, і виглядом діаграми розсіювання – з іншою, існує певний зв'язок. Якщо початок координат перенести у точку ($\bar{x}$; $\bar{y}$), то:

1) при ρ > 0 точки на діаграмі розсіювання групуються в основному у I і III квадрантах, а при ρ < 0 – у II і IV;

2) при ρ ≈ 0 точки безладно розкидані в усіх чотирьох квадратах; при ρ ± 1 точки групуються на прямих (що знаходяться або в I і III квадрантах, або в II і IV).

2.3 Порядок виконання роботи

1. Отримати у викладача вибірки двомірної випадкової величини.
2. За отриманими даними побудувати три поля розсіювання.
3. Побудувати гістограму для випадкової величини.
4. Розрахувати для усіх трьох випадків оцінки коефіцієнтів кореляції. Розрахунок коефіцієнтів кореляції здійснювати за формулою (1.9) за незгрупованими даними. Переконатися, що між виглядом поля розсіювання й величиною й знаком коефіцієнту кореляції є певний зв’язок.

2.4 Контрольні запитання

1. Дати визначення двомірного інтегрального й диференційного законів розподілення випадкової величини й назвати їхні властивості.
2. Які числові параметри найчастіше використовуються як міри розташування й розсіяння двомірної сукупності випадкової величини?
3. Яким чином здійснюється побудова поля розсіювання і складання таблиці розподілення двомірної сукупності випадкових величин?

Таблиця 2.3

Вибірка двомірної випадкової величини

Номер	Варіант													
	1		2		3		4		5		6		7	
	x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
1	-5	-1.5	-4.4	-2.4	-3.7	-3	-2.4	0.2	-3.2	-1.1	-1.8	-1.7	-2.2	-1.6
2	-1.7	-0.3	-3.2	-2.8	-4.2	-2.6	-1.9	-1.9	-2.2	-0.4	-1.2	-1.5	-2.8	-0.8
3	-3.6	-0.4	-1.5	-0.3	-2.1	-0.9	-1.4	-0.7	-4.5	-2.5	-2.2	-0.1	-4.9	-1.9
4	-2.1	-0.5	-4.7	-1.7	-1.4	-1.5	-4.3	-2.1	-1.7	-1.2	-1.6	1.4	-1.7	-1.5
5	-1.5	1.7	-1.9	1.2	-1.7	1.1	-1.1	1.0	-1.4	1.3	-4.1	-2.3	-1.0	1.4
6	-0.8	0.7	-1.4	-1.7	-1.3	-0.7	-2.5	-1.3	-2.9	-1.7	-3.2	-1.5	-3.4	-1.9
7	-0.5	0.1	-0.6	1.5	-0.9	1.9	-0.7	2.2	-0.4	1.1	-0.6	2.1	-0.7	1.2
8	-0.4	1.3	-0.3	0.6	-0.3	1.1	-0.1	-0.7	-0.2	1.5	0.1	0.3	-0.9	1.6
9	0.2	0.5	0.3	1.4	0.3	0.8	0.4	-0.7	0.1	0.1	-0.3	0.5	0.5	0.2
10	1.2	-0.8	1.3	0.8	1.3	-0.6	1.4	2.5	1.1	-0.7	1.5	1.3	1.4	-0.5
11	2.3	0.7	1.6	-0.3	2.4	0.9	1.9	-0.1	2.2	0.6	1.4	-0.6	2.5	0.8
12	1.8	1.5	2.4	1.2	1.9	1.1	2.9	1.9	1.4	1.2	2.8	1.4	1.6	1.7
13	2.5	2.4	2.6	3.7	2.9	2.1	2.4	3.2	2.7	2.5	2.1	3.1	2.1	2.2
14	2.9	1.5	3.3	2.8	2.5	1.4	3.7	2.5	2.4	1.8	3.6	2.1	2.8	1.3
15	4.4	3.8	3.6	2.1	4.5	3.6	4.5	2.9	4.6	3.5	4.1	4.1	4.7	3.4

Таблиця 2.3 (продовження)

Вибірка двомірної випадкової величини

Номер	Варіант													
	8		9		10		11		12		13		14	
	x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
1	-5.2	-1.5	-4.3	-2.1	-3.7	-3.1	-2.8	0.2	-3.1	-2.1	-1.9	-1.7	-2.1	-1.8
2	-1.7	-0.4	-3.2	-2.8	-4.4	-2.6	-1.9	-1.9	-2.2	-0.4	-1.2	-1.5	-2.8	-0.8
3	-3.4	-0.2	-2.5	-0.5	-2.1	-0.9	-1.4	-0.9	-4.3	-2.3	-2.2	-0.4	-4.7	-1.6

4	-2.1	-0.5	-4.7	-1.7	-1.1	-1.9	-4.3	-2.1	-1.7	-1.2	-2.4	1.4	-1.7	-1.5
5	-1.5	1.7	-1.9	1.2	-1.7	1.1	-1.1	1.2	-1.4	1.3	-4.1	-2.3	-1.0	1.4
6	-0.8	0.7	-1.4	-1.7	-1.3	-0.7	-2.5	-1.3	-2.9	-1.7	-3.2	-1.5	-3.4	-1.9
7	-0.5	0.1	-0.6	1.5	-0.9	1.9	-0.7	2.2	-0.4	1.1	-0.6	2.1	-0.7	1.2
8	-0.4	1.3	-0.3	0.6	-0.3	1.1	-0.1	-0.7	-0.2	1.5	0.1	0.3	-0.9	1.6
9	0.2	0.5	0.3	1.4	0.3	0.8	0.4	-0.7	0.1	0.1	-0.3	0.5	0.5	0.2
10	1.2	-0.8	1.3	0.8	1.3	-0.6	1.4	2.5	1.1	-0.7	1.5	1.3	1.4	-0.5
11	2.3	0.7	1.6	-0.3	2.4	0.9	1.9	-0.1	2.2	0.6	1.4	-0.6	2.5	0.8
12	1.8	1.5	2.4	1.2	1.9	1.1	2.9	1.9	1.4	1.2	2.8	1.4	1.6	1.7
13	2.5	2.4	2.6	3.7	2.9	2.1	2.4	3.2	2.7	2.5	2.1	3.1	2.1	2.2
14	2.9	1.5	3.3	2.8	2.5	1.4	3.7	2.5	2.4	1.8	3.6	2.1	2.8	1.3
15	4.4	3.8	3.6	2.1	4.5	3.6	4.5	2.9	4.6	3.5	4.1	4.1	4.7	3.4

Таблиця 2.3(продовження)

Вибірка двомірної випадкової величини

Номер	Варіант													
	15		16		17		18		19		20		21	
	x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
1	-5.2	-1.6	-4.6	-2.7	-3.3	-3.1	-2.2	0.1	-3.3	-1.7	-1.6	-1.8	-2.5	-1.8
2	-1.7	-0.3	-3.2	-2.8	-4.2	-2.6	-1.9	-1.9	-2.2	-0.4	-1.2	-1.5	-2.8	-0.8
3	-3.6	-0.4	-1.5	-0.3	-2.1	-0.9	-1.4	-0.7	-4.4	-2.9	-2.9	-0.1	-4.9	-1.9
4	-2.1	-0.5	-4.7	-1.7	-1.4	-1.5	-4.3	-2.1	-1.7	-1.2	-1.6	1.8	-2.7	-1.1
5	-1.7	1.4	-1.9	1.5	-1.7	1.1	-1.6	1.3	-1.4	1.3	-4.1	-2.3	-1.0	1.4
6	-0.8	0.7	-1.4	-1.7	-1.3	-0.7	-2.5	-1.3	-2.9	-1.7	-3.2	-1.5	-3.4	-1.9
7	-0.5	0.1	-0.6	1.5	-0.9	1.9	-0.7	2.2	-0.4	1.1	-0.6	2.1	-0.7	1.2
8	-0.4	1.3	-0.3	0.6	-0.3	1.1	-0.1	-0.7	-0.2	1.5	0.1	0.3	-0.9	1.6
9	0.2	0.5	0.3	1.4	0.3	0.8	0.4	-0.7	0.1	0.1	-0.3	0.5	0.5	0.2
10	1.2	-0.8	1.3	0.8	1.3	-0.6	1.4	2.5	1.1	-0.7	1.5	1.3	1.4	-0.5
11	2.3	0.7	1.6	-0.3	2.4	0.9	1.9	-0.1	2.2	0.6	1.4	-0.6	2.5	0.8
12	1.8	1.5	2.4	1.2	1.9	1.1	2.9	1.9	1.4	1.2	2.8	1.4	1.6	1.7
13	2.5	2.4	2.6	3.7	2.9	2.1	2.4	3.2	2.7	2.5	2.1	3.1	2.1	2.2
14	2.9	1.5	3.3	2.8	2.5	1.4	3.7	2.5	2.4	1.8	3.6	2.1	2.8	1.3
15	4.4	3.8	3.6	2.1	4.5	3.6	4.5	2.9	4.6	3.5	4.1	4.1	4.7	3.4

Таблиця 2.3(продовження)

Вибірка двомірної випадкової величини

Номер	Варіант													
	22		23		24		25		26		27		28	
	x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
1	-5.6	-1.1	-4.8	-2.1	-4.7	-3.3	-2.9	1.2	-3.6	-1.4	-2.8	-2.7	-2.5	-2.6
2	-1.7	-0.3	-3.2	-2.8	-4.2	-2.6	-1.9	-1.9	-2.2	-0.4	-1.2	-1.5	-2.8	-0.8
3	-4.6	-1.4	-1.8	-0.5	-2.1	-1.9	-2.4	-0.7	-4.5	-2.5	-3.2	-0.1	-4.9	-1.9
4	-2.1	-0.5	-4.7	-1.7	-1.4	-1.5	-4.3	-2.1	-2.7	-2.2	-1.6	2.4	-2.7	-1.3
5	-1.5	1.7	-1.9	1.2	-1.7	1.1	-1.1	1.0	-1.4	1.3	-4.1	-2.3	-1.0	1.4
6	-0.8	0.7	-1.4	-1.7	-1.3	-0.7	-2.5	-1.3	-2.9	-1.7	-3.2	-1.5	-3.4	-1.9
7	-0.5	0.1	-0.6	1.5	-0.9	1.9	-0.7	2.2	-0.4	1.1	-0.6	2.1	-0.7	1.2
8	-0.4	1.3	-0.3	0.6	-0.3	1.1	-0.1	-0.7	-0.2	1.5	0.1	0.3	-0.9	1.6
9	0.2	0.5	0.3	1.4	0.3	0.8	0.4	-0.7	0.1	0.1	-0.3	0.5	0.5	0.2
10	1.2	-0.8	1.3	0.8	1.3	-0.6	1.4	2.5	1.1	-0.7	1.5	1.3	1.4	-0.5
11	2.3	0.7	1.6	-0.3	2.4	0.9	1.9	-0.1	2.2	0.6	1.4	-0.6	2.5	0.8
12	1.8	1.5	2.4	1.2	1.9	1.1	2.9	1.9	1.4	1.2	2.8	1.4	1.6	1.7
13	2.5	2.4	2.6	3.7	2.9	2.1	2.4	3.2	2.7	2.5	2.1	3.1	2.1	2.2
14	2.9	1.5	3.3	2.8	2.5	1.4	3.7	2.5	2.4	1.8	3.6	2.1	2.8	1.3
15	4.4	3.8	3.6	2.1	4.5	3.6	4.5	2.9	4.6	3.5	4.1	4.1	4.7	3.4

Практична робота №3
ЕЛЕМЕНТАРНІ СТАТИСТИЧНІ ПРОЦЕДУРИ

Мета роботи – *вивчення методів точкового й інтервального оцінювання основних характеристик випадкових величин (середнього значення, дисперсії, функції щільності ймовірності), оволодіння методикою застосування статистичних критеріїв для перевірки гіпотез щодо перерахованих характеристик, а також ознайомлення з найпростішими способами планування експерименту стосовно до зазначених задач.*

3.1 Загальні поняття

При вирішенні багатьох прикладних задач необхідні імовірнісні характеристики відповідних випадкових величин невідомі досліднику і повинні визначатися за експериментальними даними. Такий статистичний опис результатів спостережень, побудова і перевірка різних математичних моделей, що використовують поняття імовірності, складають основній зміст математичної статистики.

Фундаментальними поняттями статистичної теорії є поняття генеральної сукупності й вибірки.

Генеральна сукупність звичайно інтерпретується як сукупність усіх мислимих (можливих) результатів спостережень над випадковою величиною, що у принципі можуть бути проведені за даних умов.

Змістовний сенс цього поняття полягає у тому, що передбачається існування деяких цілком визначених властивостей, невипадкових закономірностей, властивих даній сукупності, тих властивостей, що і повинні бути вияснені дослідником. Фактично ці властивості є об'єктивним відображенням ймовірнісних властивостей досліджуваного об'єкта, що можуть бути охарактеризовані за допомогою відповідних законів розподілу ймовірностей або зв'язаних з ними числових параметрів.

Вважається, що зазначені властивості не змінюються за часом і властиві генеральній сукупності невипадкові закономірності зберігають постійним свій характер, тобто є *стійкими.*

Вибірка – це кінцевий набір значень випадкової величини, отриманий у результаті спостережень. Число елементів вибірки називається її *обсягом.* Якщо, наприклад, x_1, x_2, …, x_n – спостережувані значення випадкової величини X (можливо, й такі, що збігаються), то обсяг даної вибірки дорівнює N.

Вибірка називається *репрезентативною (представницькою),* якщо вона досить повно характеризує генеральну сукупність. Для забезпечення репрезентативності вибірки частіше усього використовується випадковий вибір елементів. Передбачається, що при такому виборі кожна можлива вибірка фіксованого обсягу має ту саму імовірність вибору, а послідовні спостереження взаємно незалежні.

Зміст статистичних методів полягає у тому, щоб за вибіркою обмеженого обсягу N, тобто за деякою частиною генеральної сукупності, висловити обґрунтоване судження про її властивості у цілому. Подібне судження може бути отримане шляхом побудови емпіричних (вибіркових) аналогів ймовірнісних характеристик досліджуваної величини, інакше кажучи, шляхом оцінювання параметрів (характеристик) генеральної сукупності за допомогою деяких відповідних функцій від результатів спостережень – *оцінок.*

При багаторазовому добуванні вибірок одного й того ж самого обсягу і наступного знаходження множини оцінок одного й того ж самого параметра отримуються різні числові значення цих оцінок, що змінюються від однієї вибірки до іншої випадковим чином. Іншими словами, будь-яка оцінка довільного параметра θ є випадкова величина.

У цьому її принципова відмінність від самого оцінюваного параметра θ, що є невипадковим. Щоб підкреслити зазначену істотну обставину, для параметрів генеральної сукупності й їхніх оцінок уводяться різні позначення: у загальному випадку оцінка довільного параметра θ позначається через $\hat{\theta}$; оцінка математичного очікування (генерального середнього значення) m_x позначається частіше усього через $\bar{x}$, оцінка дисперсії σ_x^2 – через s_x^2 або просто s^2. Природно, що ймовірнісні властивості довільної оцінки $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_N)$ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ параметра θ можна описати за допомогою функції розподілу оцінки $f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})$ або її характеристик $m_{\hat{\theta}}$, $\sigma_{\hat{\theta}}^2$.

Для оцінювання одного й того ж самого параметра можна використовувати в принципі різні оцінки. Щоб вибрати найкращу з них, необхідно сформулювати деякі вимоги до властивостей оцінок, бажані з точки зору практики.

Оцінка $\hat{\theta}$ параметра θ називається *обґрунтованою,* якщо при необмеженому зростанні обсягу вибірки N значення $\hat{\theta}$ з повною мірою вірогідності (з імовірністю одиниця) прямує до свого теоретичного значення θ. Це означає, що з ростом N розподілення $f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})$ усе у більшої степені концентрується навколо θ. Обґрунтованість оцінки гарантує досліднику збільшення точності оцінювання з ростом N й те, що хоча б у межі при $N \to \infty$ він може одержати точне значення θ.

Оцінка $\hat{\theta}$ називається *незміщеною*, якщо $m_{\hat{\theta}}=\theta$ для будь-якого $m_{\hat{\theta}}=\theta$. Незміщеність означає відсутність систематичної похибки при оцінюванні параметра θ.

Оцінка $\hat{\theta}$ називається *ефективною,* якщо серед усіх оцінок параметра θ вона має найменшу дисперсію $\sigma_{\hat{\theta}}^2$. Ефективна оцінка, отже, має мінімальну випадкову помилку й у цьому сенсі є найточнішою.

Властивості оцінок різних параметрів θ багато в чому визначаються видом закону розподілу досліджуваної генеральної сукупності. Далі найчастіше будемо припускати, що цей закон є нормальним (або гаусовим) із щільністю імовірності, що задається формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-(x-m_x)^2/(2\sigma_x^2)}. \tag{3.1}$$

Тут m_x і σ_x^2 – математичне очікування і дисперсія випадкової величини X.

3.2 Статистичне оцінювання

1. Точкові оцінки математичного очікування і дисперсії. *Точкові оцінки* – це оцінки деяких невідомих числових параметрів розподілу. Вони являють собою числа, отримані шляхом підставки вибіркових значень x_1, x_2, …, x_n формулу для оцінювання шуканого параметра. Математичне очікування m_x і дисперсію σ_x^2 звичайно оцінюють за допомогою таких співвідношень:

$$m_x \to \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \tag{3.2}$$

$$\sigma_x^2 \to s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2\right]. \tag{3.3}$$

Зазначені оцінки є обґрунтованими і незміщеними. Для вибірки з нормальної сукупності оцінка $\bar{x}$, крім того, є ефективної, а s_x^2 прямує до ефективної при $N \to \infty$, або, як кажуть, вона *асимптотично ефективна.*

Незміщуваність оцінки s_x^2 досягається використанням у знаменнику формули (3.3) величини $\nu = N - 1$ замість очевидного на перший погляд значення N. Величина v називається *числом степенів вільності*. Вона дорівнює різниці між числом наявних експериментальних значень N, за якими обчислюють оцінку дисперсії, і кількістю додаткових параметрів, що входять у формулу для оцінки цієї дисперсії і обчислюваних у вигляді лінійних комбінацій тих самих спостережень (у даному випадку це усього один параметр $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$).

2. Інтервальні оцінки математичного очікування і дисперсії. Точкові оцінки параметрів не дають інформації про степінь близькості оцінки $\hat{\theta}$ до відповідного теоретичного параметра θ. Тому інформативніший спосіб оцінювання невідомих параметрів полягає не у визначенні одиничного точкового значення, а в побудові інтервалу, у якому з заданим степенем вірогідності опиниться оцінюваний параметр, тобто у побудові так званої інтервальної оцінки параметра θ.

Інтервальною оцінкою параметра θ називається інтервал, границі котрого $\hat{l}_1$ і $\hat{l}_2$ є функціями вибіркових значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і який з заданою імовірністю р накриває оцінюваний параметр θ:

$$P\{\hat{l}_1 < \theta \leq \hat{l}_2\} = p. \qquad (3.4)$$

Інтервал $(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ називається *довірчим,* його межі $\hat{l}_1$ і $\hat{l}_2$, що є випадковими величинами,– відповідно нижньою і верхньою *довірчими межами,* ймовірність *p – довірчою ймовірністю,* а величина $q = 1 - p$ – *рівнем значимості,* використовуваним при побудові довірчого інтервалу. Будь-яка інтервальна оцінка може бути охарактеризована сукупністю двох чисел: шириною довірчого інтервалу $L = \hat{l}_2 - \hat{l}_1$, що є мірою точності оцінювання параметра θ, і довірчою ймовірністю *p,* що характеризує степінь вірогідності (надійності) результатів. Практично частіше усього використовується значення p = 0,95, дещо рідше p = 0,9 і p = 0,99 і зовсім зрідка p = 0,8 і p = 0,999.

Загальна процедура одержання інтервальної оцінки така:

1. Записують певне ймовірнісне твердження виду:

$$P\{\delta_1 \le g(\theta,\hat{\theta}) < \delta_2\} = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(g)dg = p\,, \qquad (3.5)$$

де $f(g)$ – функція щільності імовірності випадкової величини g. При цьому значення δ_1 і δ_2 визначають зазвичай з урахуванням додаткових умов:

$$P\{g(\theta,\hat{\theta}) < \delta_1\} = P\{g(\theta,\hat{\theta}) \ge \delta_2\} = (1-p)/2 = q/2\,. \quad (3.6)$$

2. Аргумент виразу (3.5). перетворюють так, щоб в остаточному вигляді оцінюваний параметр опинився між величинами, визначеними за вибіркою. Це і будуть границі довірчого інтервалу $(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$. Функцію g вибирають таким чином, щоб вона допускала подібне перетворення й мала відому (краще табульовану) функцію щільності імовірності $f(g)$. Остання обставина істотно спрощує визначення значень δ_1 і δ_2.

Як приклад одержимо інтервальну оцінку математичного очікування m_x нормальної генеральної сукупності з відомою дисперсією σ_x^2. Відомо, що функція g=$\frac{\bar{x}-m_x}{\sigma_{x/\sqrt{N}}}$ підпорядковується нормованому нормальному розподілу (або u-розподілу; див. Додаток ІІ). Тоді співвідношення (3.5) з урахуванням (3.6) прийме вигляд:

$$P\left\{-u_{\alpha=q/2} \le \frac{\bar{x}-m_x}{\sigma_x/\sqrt{N}} < u_{\alpha=q/2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u_{\alpha=q/2}}^{u_{\alpha=q/2}} e^{-g^2/2\mathrm{dg}} = \mathrm{p}.$$

Після перетворення аргументу одержимо:

$$\bar{x} - u_{\alpha=q/2}\,\sigma_x/\sqrt{N} < m_x \le \bar{x} + u_{\alpha=q/2}\,\sigma_x/\sqrt{N}. \qquad (3.7)$$

Отже, у даному випадку:

$$\hat{l}_1 = \bar{x} - u_{\alpha=q/2}\,\sigma_x/\sqrt{N}\,,$$
$$\hat{l}_2 = \bar{x} + u_{\alpha=q/2}\,\sigma_x/\sqrt{N},$$

а ширина довірчого інтервалу складає:

$$L = \hat{l}_2 - \hat{l}_1 = 2u_{\alpha=q/2}\sigma_x/\sqrt{N}\,. \qquad (3.8)$$

Довірчий інтервал для m_x, обумовлений нерівністю (3.7), можна інтерпретувати таким чином: якщо багаторазово добувати вибірки обсягу N і за допомогою нерівності (3.7) визначати довірчий інтервал, то в середньому 100 $p\%$ побудованих таким чином інтервалів містять дійсне значення m_x.

У табл. 3.1 наведені відомості, необхідні для побудови довірчих інтервалів для середнього значення m_x, коли σ_x^2 невідома, для дисперсії σ_x^2 і середнього квадратичного відхилення σ_x. Очікується, що X – нормальна випадкова величина, а спостереження незалежні. Відповідні формули мають такий вигляд:

$$\bar{x} - t_{\nu;\alpha=q/2}\,s_x/\sqrt{N} < m_x \le \bar{x} + t_{\nu;\alpha=q/2}\,s_x/\sqrt{N}, \qquad (3.9)$$

$$\nu s_x^2/\chi^2_{\nu;\alpha=q/2} < \sigma_x^2 \le \nu s_x^2/\chi^2_{\nu;\alpha=1-q/2}, \qquad (3.10)$$

$$\sqrt{\nu s_x^2/\chi^2_{\nu;\alpha=q/2}} < \sigma_x \le \sqrt{\nu s_x^2/\chi^2_{\nu;\alpha=1-q/2}}. \qquad (3.11)$$

У цих формулах $v = N - 1$, $q = 1 - p$, де p – довірча ймовірність.

Таблиця 3.1

Параметр θ	Інформація про параметри розподілу	Функція g	Розподіл $f(g)$	Формула для знаходження довірчого інтервалу
m_x	σ_x^2 невідома	$\dfrac{\bar{x} - m_x}{s_x/\sqrt{N}}$	t-розподіл (див. Додаток V)	(3.9)
σ_x^2	m_x невідомо	$\dfrac{(N-1)s_x^2}{\sigma_x^2}$	χ^2-розподіл (см Додаток IV)	(3.10)
σ_x	»	»	»	(3.11)

3. Планування експерименту при побудові інтервальних оцінок. У цьому випадку планування експерименту зводиться до визначення необхідного обсягу N вибірки, з тим щоб при фіксованій довірчій імовірності досягти заданої точності оцінювання параметрів. У якості характеристики цієї точності будемо використовувати відносну величину $\varepsilon = L/(2\sigma_x)$. Розглянемо розв'язання даної задачі для оцінки m_x і σ_x.

Якщо оцінюється математичне очікування, то за допомогою формули (3.8) одержимо:

$$\varepsilon = u_{\alpha=q/2}/\sqrt{N}$$

і, задаючи гранично припустиму відносну похибку $\varepsilon_{доп}$, маємо:

$$N \geq (u_{\alpha=q/2}/\varepsilon_{доп})^2. \qquad (3.12)$$

Можна показати, що з ймовірністю p справедливі такі нерівності:

$$\sigma_x/(1+\varepsilon) < s_x\sqrt{\nu/\chi^2_{\nu;\alpha=q/2}} < \sigma_x < s_x\sqrt{\nu/\chi^2_{\nu;\alpha=1-q/2}} < \sigma_x(1+\varepsilon),$$

де $1+\varepsilon=\sqrt{\chi^2_{\nu;\alpha=q/2}/\chi^2_{\nu;\alpha=1-q/2}}$.

Звідси одержуємо, що з ймовірністю p довірчий інтервал (3.11) оцінює середнє квадратичне відхилення σ_x з відносною похибкою, що не перевершує $100*\varepsilon$%. Задаючи $\varepsilon_{доп}$ легко отримати рівняння для визначення ν:

$$\chi^2_{\nu;\alpha=q/2}/\chi^2_{\nu;\alpha=1-q/2} \leq \left(1+\varepsilon_{доп}\right)^2, \qquad (3.13)$$

розв'язуване методом добору за допомогою таблиці χ^2-розподілу**.** Іноді зручніше перейти до еквівалентної форми, скориставшись зв'язком між χ^2-розподілом і F-розподілом Фішера (див. Додаток VI):

$$F_{\nu;\infty;\alpha=q/2}\, F_{\infty;\nu;\alpha=q/2} \leq (1+\varepsilon_{доп})^2. \quad (3.14)$$

3.3 Перевірка статистичних гіпотез

1. Статистичні гіпотези. *Статистична гіпотеза* є деяке припущення щодо властивостей генеральної сукупності, із якої добувається вибірка. *Критерій статистичної гіпотези* – це правило, що дозволяє прийняти або відкинути дану гіпотезу на підставі вибірки. При побудові такого правила використовуються певні функції результатів спостережень $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що називаються *статистиками для перевірки гіпотез.* Усі можливі значення подібних статистик поділяються на дві частини: *області прийняття гіпотези* і *критичної області*. Перевірка гіпотези зводиться до з'ясування того, потрапляє або ні конкретне значення статистики, обчислене за вибіркою, у критичну область: якщо ні – гіпотеза приймається, як така, що не суперечить результатам спостереження, якщо так – гіпотеза відхиляється. При цьому завжди можливо зробити помилку; різні типи можливих помилок вказані у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Гіпотеза	Об'єктивно вірна	Об'єктивно невірна
Приймається	Правильне рішення	Помилка II роду
Відхиляється	Помилка I роду	Правильне рішення

Ймовірність зробити помилку I роду називається *рівнем значимості критерію* і позначається q. Зазвичай рівень значимості вибирають рівним 0,01; 0,1; 0,05 (останнє значення – найчастіше).

2. Критерії значимості. *Критерії значимості* – це критерії, за допомогою яких перевіряють гіпотези про абсолютні значення параметрів або про співвідношення між ними для генеральних сукупностей з відомою (з точністю до параметрів) функцією розподілу ймовірностей.

Для пояснення ідеї побудови критеріїв значимості припустимо, що деяка оцінка $\hat{\theta}$, використовувана потім у якості статистики g, обчислена за вибіркою обсягу N. Нехай є причини вважати, що дійсне значення оцінюваного параметра θ, тобто його значення у генеральній сукупності, дорівнює θ_0. Це припущення, що перевіряється, часто *називають нульовою гіпотезою* H_0 і пишуть H_0: $\theta = \theta_0$.

Навіть якщо нульова гіпотеза справедлива, то вибіркове значення $\hat{\theta}$ зазвичай не збігається точно з θ_0, оскільки воно є усього лише одним з конкретних значень випадкової величини $\hat{\theta}$, породженої найрізноманітнішими вибірками обсягу N. Питається: наскільки сильно $\hat{\theta}$ повинно відрізнятися від θ_0, щоб у достатній мірі обґрунтовано можна було відкинути нульову гіпотезу? Якщо відома функція щільності імовірності оцінки $f(\hat{\theta})$, побудована теоретично у припущенні справедливості нульової гіпотези, то з її допомогою нескладно знайти таку зону, імовірність випадкових влучень у котру (коли H_0 вірна) мала (дорівнює малому значенню q). Ця зона і може використовуватися в якості критичної області критерію.

Вид критичної області цілком визначається характером *альтернативної гіпотези* H_1, тобто гіпотези, що протиставляється нульовій, тобто гіпотези, на користь якої схиляється дослідник, відхиляючи нульову гіпотезу, що перевіряється.

Якщо нульовій гіпотезі H_0: $\theta = \theta_0$ протиставляється альтернативна гіпотеза H_1: $\theta \neq \theta_0$, то критерій для перевірки H_0 зветься *двобічним,* а його критична область складається з двох частин. Якщо ж альтернативна гіпотеза формулюється у вигляді H_1: $\theta < \theta_0$ або H_1: $\theta > \theta_0$, то відповідні критерії називаються *однобічними* і їхні критичні області містять усього одну частину.

У табл. 3.3 приведені деякі стандартні критерії, що дозволяють перевіряти гіпотези про значення математичних очікувань і дисперсій нормальних генеральних сукупностей при незалежних спостереженнях у вибірці.

3. Планування експерименту при перевірці гіпотез за допомогою критеріїв значимості полягає у визначенні обсягу N вибірки, що гарантує виявлення заданого відхилення досліджуваного параметра θ від гіпотетичного θ_0 при фіксованих імовірностях помилок I і II роду (q і β).

Розглянемо цю задачу для найпростішого випадку перевірки гіпотези $\begin{matrix} H_0: m_x = \mathrm{m}_0 \\ H_1: m_x > \mathrm{m}_0 \end{matrix}$ з рівнем значимості q, коли дисперсія σ_x^2 відома. У цьому випадку границя критичної області $g_{\text{кр}}$ визначається співвідношенням:

$$\frac{g_{\text{кр}} - m_0}{\sigma_x/\sqrt{N}} = \mathrm{u}_{\alpha - q}. \qquad (3.15)$$

Нехай дослідник бажає відрізнити друг від друга два можливих значення математичного очікування: m_0 і $m_1 > m_0$. Імовірність помилки II роду β, якщо гіпотеза H_0 невірна ($m_x = m_1$), але приймається, задається положенням $g_{кр}$ відносно m_1. За допомогою рис. 3.1 легко знайти, що:

$$\frac{g_{кр}-m_1}{\sigma_x/\sqrt{N}} = -u_{\alpha-\beta}. \qquad (3.16)$$

Віднімаючи (3.16) з (3.15), одержимо:

$$\frac{m_1 - m_0}{\sigma_x/\sqrt{N}} = u_{\alpha-\beta} + u_{\alpha-q}$$

Таблиця 3.3

№	Гіпотеза H_0, що перевіряється, і альтернативна гіпотеза H_1	Інформація про параметри розподілу	Статистика g і її позначення для кожного критерію	Розподіл статистики g при справедливій гіпотезі H_0	Критична область
1	H_0: $m_x = m_0$ H_1: $m_x \neq m_0$				
2	H_0: $m_x = m_0$ H_1: $m_x < m_0$	σ_x^2 невідомо	$t = \frac{\bar{x} - m_0}{s_x/\sqrt{N}}$	t-розподіл з $\nu = N - 1$ степенями вільності	
3	H_0: $m_x = m_0$ H_1: $m_x > m_0$				
4	$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2$				

5	$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma_x^2 < \sigma_0^2$	m_x невідомо	$\chi^2 = \dfrac{(N-1)s_x^2}{\sigma_0^2}$	χ^2-розподіл з $\nu = N$ - 1 степенями вільності	
6	$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma_x^2 > \sigma_0^2$				
7	$H_0: \sigma_{x_2}^2 = \sigma_{x_2}^2$ $H_1: \sigma_{x_2}^2 \neq \sigma_{x_2}^2$		$F = s_1^2/s_2^2$, де $s_1^2 = \max\{s_{x_1}^2, s_{x_2}^2\}$	F-розподіл з ν_1, ν_2 степенями вільності, де ν_1 і ν_2 – число степенів вільності чисельника і знаменника	
8	$H_0: \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$ $H_1: \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2$	m_{x1}, m_{x2} невідомі	$F = s_{x_1}^2 s_{x_2}^2$		
9	$H_0: \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$ $H_1: \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2$		$F = s_{x_2}^2 s_{x_1}^2$		

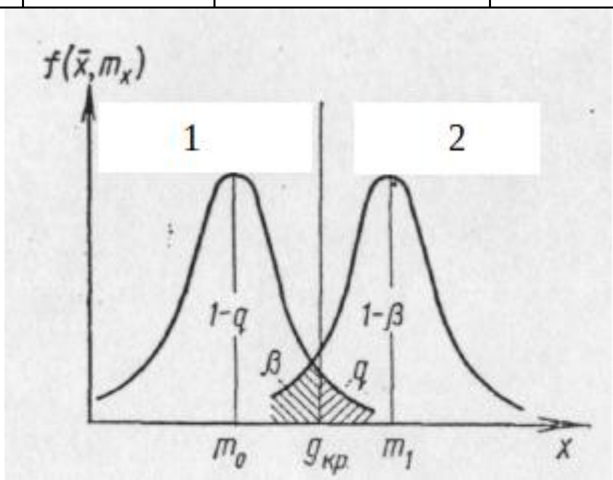


Рис. 3.1 Область прийняття гіпотези (1), критична область (2)

і, отже,

$$N = \left(\frac{u_{\alpha-\beta} + u_{\alpha-q}}{d_0}\right)^2, \qquad (3.17)$$

де

$$d_0 = (m_1 - m_0)/\sigma_x \qquad (3.18)$$

– відносна величина розбіжності між m_1 і m_0, яку слід виявити. Природно, що отримане значення N потрібно округлити до найближчого більшого цілого числа. Формула (3.17) справедлива і для випадку, коли $m_1 < m_0$.

Для двобічного критерію відповідне співвідношення виводиться аналогічно. З метою прискорення розрахунків залежності $N(d_0)$ можна зобразити графічно (рис. 3.2); там же зображені залежності $N(d_0)$ і для випадку невідомої дисперсії σ_x^2 (критерії 1–3 з табл. 3.3).

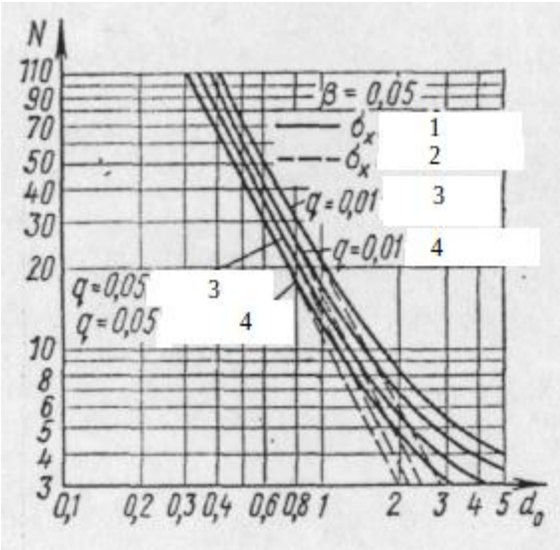


Рис. 3.2 Залежності $N(d_0)$

1 — невідома, 2 — відома, 3 — двобічна, 4 - однобічна

Якщо потрібно перевірити гіпотезу $\begin{matrix} H_0\colon \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1\colon \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{matrix}$ і при цьому з заданою надійністю розрізнити значення σ_0^2 і σ_1^2, причому $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ ($\sigma_1^2/\sigma_0^2 = d_0 > 1$), то необхідне для цього число спостережень визначають таким способом: за допомогою таблиці χ^2-розподілу знаходять таке число степенів вільності ν, для якого:

$$\chi^2_{\nu;\alpha=q}/\chi^2_{\nu;\alpha=1-\beta} \approx d_0. \qquad (3.19)$$

Якщо ж необхідно розрізнити такі σ_0^2 і σ_1^2, що $\sigma_1^2/\sigma_0^2 = \mathrm{d}_0 < 1$, то значення ν знаходять аналогічним способом за допомогою співвідношення:

$$\chi^2_{\nu;\alpha=1-q}/\chi^2_{\nu;\alpha=\beta} \approx d_0. \qquad (3.20)$$

Для критеріїв 7-9 із табл. 3.3 спосіб знаходження необхідної кількості спостережень N відрізняється лише тим, що використовують таблиці F-розподілу. Нехай потрібно перевірити гіпотезу $\begin{matrix} H_0: \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 \\ H_1: \sigma_{x_1}^2 > \sigma_{x_2}^2 \end{matrix}$ за допомогою однобічного критерію на рівні значимості q (випадок альтернативи $\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2$ зводиться до розглянутого зміною індексів 1 і 2). Потрібно, щоб імовірність відкидання гіпотези, що перевіряється, щонайменше дорівнювала 1 - β, як тільки $\sigma_{x_1}^2/\sigma_{x_2}^2 \ge d_0 > 1$. Для виконання цієї вимоги необхідно використовувати вибірки обсягів $N_{x1} = \nu_1 + 1$, $N_{x2} = \nu_2 + 1$, де ν_1 і ν_2 знаходять за допомогою наближеного співвідношення:

$$F_{\nu1;\nu2;\alpha=q} F_{\nu1;\nu2;\alpha=\beta} \approx d_0. \qquad (3.21)$$

Якщо $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ і $q = \beta$, то формула (3.21) спрощується:

$$F_{\nu_1;\nu_2;\alpha=q} \approx \sqrt{d_0}. \qquad (3.22)$$

Співвідношення (3.19) - (3.22) можна використовувати для наближеного визначення N у випадку двобічних критеріїв, якщо у цих співвідношеннях q замінити на $q/2$, а β – на $\beta/2$.

Якщо необхідно, то формули (3.17), (3.19) - (3.22) і графіки, зображені на рис. 3.2, можна використовувати і для вирішення зворотної задачі: за відомими обсягами вибірок, визначити ту мінімальну розбіжність між передбачуваним і фактичним значеннями параметра, що виявляється критерієм при фіксованих ймовірностях q і β.

4. Критерії згоди. *Критерієм згоди* називається критерій гіпотези про те, що генеральна сукупність має розподіл передбачуваного типу (наприклад, нормальний розподіл). Серед різних критеріїв згоди найвикористовуваніший універсальний критерій згоди χ^2 (Пірсона).

Перевірку гіпотези про вид функції розподілу за допомогою цього критерію здійснюють таким чином:

1. а) За вибіркою будують гістограму. Якщо у будь-якому j-му інтервалі число спостережень n_j виявиться менше п'яти, то його об'єднують з сусіднім інтервалом (або інтервалами) так, щоб число спостережень у такому об'єднаному інтервалі виявилося більшим або рівним п'яти. Нехай K_r – остаточне число інтервалів групування, тоді очевидно, що:

$$\sum_{\mathrm{m=1}}^{K_r} n_m = \mathrm{N}. \qquad (3.23)$$

б) Задаються видом гіпотетичної функції розподілу і для кожного з r (r = 1, 2, …) параметрів цього розподілу знаходять оцінки, причому ці оцінки можна визначати як за вихідними, так і за згрупованими даними.

в) Визначають теоретичну імовірність p_m потрапляння у кожний з K_r інтервалів випадкової величини з заданим розподілом, параметри котрого або відомі, або оцінені у п. б).

г) Обчислюють число g:

$$\mathrm{g} = \mathrm{N}\sum_{\mathrm{m=1}}^{K_r} \frac{(n_m/N - p_m)^2}{p_m} = \sum_{\mathrm{m=1}}^{K_r} \frac{(n_m - \mathrm{N}p_m)^2}{\mathrm{N}p_m}. \qquad (3.24)$$

2. Відомо, що для даного критерію згоди випадкова величина g при великих N має χ^2-розподілення з $K_r - r$ - 1 степенями вільності, де r – число обумовлених у п. 16 невідомих заздалегідь параметрів гіпотетичного розподілу, а зменшення числа степенів вільності ще на одиницю пояснюється наявністю лінійного співвідношення (3.23) між емпіричними величинами n_m і N, що входять у розрахункову формулу (3.24). Задаючись рівнем значимості q, за таблицею χ^2-розподілу знаходять критичне значення $g_{кр}$, причому критична область визначається нерівністю $g > g_{кр} = \chi^2_{\nu = K_r - r - 1; \alpha = q}$.

3. Порівнюють значення g і $g_{кр}$ і виносять рішення про прийняття (якщо $g \leq g_{кр}$) або відхилення ($g > g_{кр}$) розглянутої гіпотези про вид функції розподілу.

3.4 Порядок виконання роботи

1. Нехай за вибіркою обсягом N визначені оцінки математичного очікування і дисперсії: $\bar{x}$; s_x^2 (табл. 3.4). Побудувати довірчі інтервали:

1) для m_x при p = 0,95;

2) для σ_x^2 при p = 0,9.

Таблиця 3.4

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	9	8	10	11	9	8	10	11	9	10	11	9	8
$\bar{x}$	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,1	2,2	2,3	2,4	2,3	2,4	2,1	2,2
s_x^2	6,25	6,2	6,3	6,4	6,5	6,5	6,4	6,3	6,2	6,2	6,3	6,4	6,5
Варіант	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
N	8	10	11	9	8	10	11	9	8	10	11	9	10
$\bar{x}$	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,1	2,2	2,1	2,2	2,1	2,4	2,1	2,4

s_x^2	6,4	6,5	6,5	6,4	6,3	6,2	6,5	6,4	6,3	6,2	6,2	6,5	6,4

1) Розрахувати v. З Додатка V знаходимо $t_{\text{ν;α=q}/2}$. Підставляючи $\bar{x}$, s_x, N і $t_{\text{ν;α}}$ у формулу (3.9), одержимо довірчий інтервал для m_x.

2) Аналогічно, використовуючи Додаток IV, визначаємо $\chi^2_{\text{ν;α=q}/2}$, $\chi^2_{\text{ν;α}=1-q/2}$.

Після підстави N, s_x^2 і табличних значень $\chi^2_{\text{ν;α}}$ у формулу (3.10) знаходимо інтервальну оцінка для σ_x^2.

2. Оцінити m_x з відносною похибкою $\varepsilon_{\text{доп}}$ = 0,5 при q = 0,01. Тоді визначити $u_{\text{α}=0{,}005}$ і $N \geq \left(u_{\text{α}=0{,}005}/\varepsilon_{\text{доп}}\right)^2$ і після округлення отримуємо необхідну кількість дослідів.

3. Побудувати інтервальну оцінку σ_x з відносною похибкою $\varepsilon_{\text{доп}}$ = 0,5 при p = 0,9.

Використовуючи Додаток IV, знаходимо $\chi^2_{\text{ν;α}=0{,}05}/\chi^2_{\text{ν;α}=0{,}95}$ і, отже, для вирішення задачі необхідна вибірка обсягу N спостережень.

4. Перевірити гіпотезу $\begin{matrix} H_0\colon m_x = 0 \\ H_1\colon m_x > 0, \end{matrix}$ q$_i$, якщо при обробці вибірки з N спостережень отримано x, s (табл. 3.5).

5. Використовуємо критерій 3 табл. 3.3. Тоді одержимо t, v і $t_{\text{ν;α}=0{,}05}$. Якщо $t > t_{\text{ν;α}}$, то гіпотеза H_0 повинна бути відкинута.

6. За N_1 спостереженнями над випадковою величиною X_1 і N_2 спостереженням над X_2 отримані оцінки дисперсій $s^2_{x_1}$ і $s^2_{x_2}$. Перевірити гіпотезу $\begin{matrix} H_0\colon \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1\colon \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2, \end{matrix}$ q$_i$ (табл. 3.6).

7. Використовуючи критерій 7 табл. 3.3, знаходимо F. Розраховуємо, ν_1, ν_2 і за допомогою Додатка VII одержуємо $F_{\nu_1;\nu_2;\text{α}=0{,}025}$. Якщо F менше табличного значення і, отже, не потрапляє в критичну область, то можна вважати, що дані вибірки не суперечать гіпотезі H_0.

Таблиця 3.5

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
q_i	0,05	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05
N	10	11	9	11	10	12	12	10	11	10	12	9	11
x	1,38	1,34	1,39	1,42	1,39	1,32	1,41	1,36	1,35	1,42	1,39	1,32	1,41
s	1,23	1,28	1,21	1,25	1,27	1,24	1,26	1,22	1,24	1,28	1,21	1,25	1,27
Варіант	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
q_i	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05	0,05	0,06
N	9	11	10	12	10	11	10	12	9	11	9	11	10
x	1,32	1,41	1,36	1,35	1,42	1,39	1,32	1,34	1,39	1,42	1,39	1,32	1,41
s	1,27	1,24	1,26	1,22	1,24	1,28	1,21	1,25	1,27	1,21	1,25	1,27	1,24

Таблиця 3.6

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
q_i	0,05	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05
N_1	13	11	9	11	10	12	12	10	11	9	11	10	12
N_2	16	17	15	18	16	17	16	15	18	18	16	17	16
$s_{x_1}^2$	0,0139	0,0142	0,0138	0,0141	0,0136	0,0137	0,0143	0,0138	0,0142	0,0138	0,0141	0,0136	0,0137
$s_{x_2}^2$	0,0295	0,0275	0,0285	0,0305	0,0270	0,0290	0,0295	0,0300	0,0265	0,0290	0,0295	0,0300	0,0265
Варіант	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
q_i	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,06	0,07	0,05	0,06	0,07	0,05

N_1	9	11	10	12	10	11	9	11	10	12	13	11	9
N_2	16	17	16	15	18	18	16	17	15	18	16	17	15
$s_{x_1}^2$	0,0142	0,0138	0,0141	0,0136	0,0137	0,0143	0,0141	0,0136	0,0137	0,0143	0,0138	0,0142	0,0136
$s_{x_2}^2$	0,0275	0,0285	0,0305	0,0270	0,0290	0,0295	0,0300	0,0265	0,0270	0,0290	0,0295	0,0300	0,0265

3.5 Контрольні запитання

1. Дати визначення генеральної сукупності і вибірки.

2. У чому полягає різниця між оцінюваним параметром генеральної сукупності і його оцінкою?

3. Які оцінки параметрів розподілу називаються обґрунтованими, незміщеними й ефективними?

4. Що таке точкові й інтервальні оцінки параметрів?

5. Як знаходяться оцінки математичного очікування і дисперсії та які їхні властивості?

6. Як визначаються довірчі інтервали для m_x, σ_x^2, σ_x?

7. У чому перебуває планування експерименту при побудові інтервальних оцінок?

8. Яка загальна процедура перевірки статистичних гіпотез?

9. Якого роду гіпотези перевіряються за допомогою критеріїв значимості й критеріїв згоди?

10. Як перевіряються гіпотези щодо значень математичних очікувань і дисперсій нормальних генеральних сукупностей?

11. Яка задача планування експерименту при перевірці гіпотез за допомогою критеріїв значимості та як вона вирішується?

12. У чому полягає процедура перевірки гіпотез про вид функції розподілу за допомогою критерію згоди χ^2 (Пірсона)?

13. Як користуватися таблицями відповідних розподілів при визначенні довірчих інтервалів і при перевірках гіпотез?

Практична робота №4

ЕЛЕМЕНТИ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Мета роботи – *вивчення методів планування експериментів для одержання лінійної математичної моделі статики складних об'єктів*.

4.1 Статистичні методи планування активного експерименту

Статистичні методи планування активного експерименту є одним з емпіричних способів одержання математичного опису статики складних об'єктів дослідження, тобто рівняння зв'язку відгуку об'єкта y і незалежних керованих нормованих вхідних змінних (чинників) $\vec{z}^T = (z_1, z_2, ..., z_n)$. При цьому математичний опис представляється у вигляді деякого полінома – відрізка ряду Тейлора, у який розкладається невідома залежність в околі основної точки $\vec{z}_0$:

$$M\{y\} = \phi(z_1, z_2, ..., z_n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i + \sum_{i;l=1}^{n} \beta_{il} z_i z_l + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} z_i^2 + ..., \quad (4.1)$$

де $\beta_i = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\right|_{\vec{z}=\vec{z}_0}$; $\beta_{il} = \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_l}\right|_{\vec{z}=\vec{z}_0}$; $\beta_{ii} = \left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i^2}\right|_{\vec{z}=\vec{z}_0}$ – теоретичні коефіцієнти.

Унаслідок наявності некерованих і навіть неконтрольованих чинників зміна розміру y носить випадковий характер, тому функціональна залежність $\phi(\vec{z})$ не дає точного зв'язку між керованими чинниками і відгуком y_g об'єкта у кожному g-му досліді, а лише між керованими чинниками і математичним очікуванням випадкової величини y:

$$M\{y_g\} = \phi(\vec{z}_g). \quad (4.2)$$

де $\vec{z}_g^T = (z_{1g}, z_{2g}, \ldots, z_{ng})$ – g-а точка простору незалежних керованих чинників (факторного простору). У такому випадку за результатами експерименту можна відшукати рівняння регресії у формі деякого полінома:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i + \sum_{\substack{i;l=1 \\ i<l}}^{n} b_{il} z_i z_l + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} z_i^2 + \ldots, \qquad (4.3)$$

де вибіркові коефіцієнти регресії b_0, b_i, b_{il}, b_{ii} є лише оцінками для теоретичних коефіцієнтів, відповідно β_0, β_i, β_{il}, β_{ii}, ..., а $\hat{y}$ – оцінкою для $M\{y\}$. Нехай $\vec{z}_g$(g=1,2,...,N) – точки факторного простору, у яких проводиться експеримент. Тоді задача відшукання оцінок коефіцієнтів рівняння регресії (4.3) за результатами дослідів у N точках факторного простору є типовою задачею множинного регресійного аналізу в тому випадку, якщо виконуються такі передумови:

1. Результати спостережень y_1, y_2, …, y_N відгуку в N точках факторного простору являють собою незалежні нормально розподілені випадкові величини, тобто на них впливають нормально розподілені випадкові перешкоди ε з нульовим математичним очікуванням $M\{\varepsilon\} = 0$.

2. Дисперсії $\sigma^2\{y_g\}$(g=1,2,...,N) однакові. Це означає, що одержувані при проведенні багаторазових повторних спостережень над величиною y_g у точках z_g вибіркові оцінки $s_g^2\{y\}$ однорідні, дисперсія ж $\sigma^2\{y_g\}$ не залежить від математичного очікування $M\{y_g\}$, тобто не відрізняється від дисперсії $\sigma^2\{y_g\}$, отриманої при повторних спостереженнях у будь-який іншій точці z_q факторного простору (відтворюваність із рівною точністю).

3. Незалежні керовані чинники z_1, z_2, …, z_n вимірюються малими помилками, якими можна знехтувати у порівнянні з помилкою у визначенні y (мається на увазі вплив їхніх помилок на величину y у порівнянні з впливом некерованих і неконтрольованих чинників ε).

Розглянемо задача знаходження коефіцієнтів рівняння регресії (4.3) на прикладі рівняння другого порядку з чотирма незалежними чинниками, при цьому, природно, уся процедура і зроблені висновки можуть бути поширені на рівняння будь-якої степені з n незалежними чинниками. Насамперед спростимо систему позначень: уведемо фіктивну змінну $z_0 = 1$ і позначимо $z_0 = f_0$, $z_1 = f_1$, … , $z_4 = f_4$, $z_1^2 = f_5$, …, $z_4^2 = f_8$, $z_1 z_4 = f_9$, …, $z_3 z_4 = f_{14}$ ... У новій системі позначень поліном другої степені записується як лінійне однорідне рівняння:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{14} b_i f_i. \qquad (4.4)$$

Нехай проводяться досліди в N точках 4-факторного простору X, причому y_g – значення відгуку при досліді у точці $\vec{z}_g$(g=1,2,...,N). Коефіцієнти рівняння (4.4) знаходяться на підставі методу найменших квадратів, тобто з умови мінімуму суми квадратів відхилень значень відгуку $\hat{y}_g$, завбачених рівнянням (4.4) для умов дослідів у точках z_g, від спостережених значень y_g, що отримуються при дослідах у цих точках:

$$\sum_{g=1}^{N}\left(y_g - \hat{y}_g\right)^2 = \sum_{g=1}^{N}\left(y_g - \sum_{j=1}^{14} b_j f_{gj}\right)^2. \qquad (4.5)$$

Оскільки задача полягає у відшуканні значень коефіцієнтів b_j, що мінімізують вирази (4.5), вона вирішується за допомогою *системи* так званих *нормальних рівнянь,* отриманих прирівнюванням нулю частинних похідних від квадратичної форми (4.5) за перемінними параметрами b_j (j = 0, 1, 2, ..., 14). Система нормальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} c_{00}b_0+c_{01}b_1+\ldots+c_{0.14}b_{14}=\alpha_0, \\ c_{10}b_0+c_{11}b_1+\ldots+c_{1.14}b_{14}=\alpha_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{14.0}b_0+c_{14.1}b_1+\ldots+c_{14.14}b_{14}=\alpha_{14}, \end{pmatrix} \qquad (4.6)$$

де

$$C=\{c_{ji}\}=\begin{pmatrix} c_{00}c_{01}\ldots c_{0.14} \\ c_{10}c_{11}\ldots c_{1.14} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{14.0}c_{14.1}\ldots c_{14.14} \end{pmatrix} \qquad (4.7)$$

– матриця коефіцієнтів системи (4.6), елементи якої знаходяться таким чином:

$$c_{jl}=\sum_{g=1}^{N} f_{gj}f_{gl}. \qquad (4.8)$$

Матриця $F\{f_{gj}\}$ називається *матрицею незалежних змінних величин*, тоді $F^T\{f_{jg}\}$ – матриця, отримана транспонуванням матриці F, причому:

$$F\{f_{gj}\}=\begin{pmatrix} f_{10}f_{11}\ldots f_{1.14} \\ f_{20}f_{21}\ldots f_{2.14} \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_{N0}f_{N_1}\ldots f_{N.14} \end{pmatrix}. \qquad (4.9)$$

Можна показати, що $C = F^T F$.

Вільні члени α_j системи нормальних рівнянь визначаються за допомогою рівності:

$$\alpha_j=\sum_{g=1}^{N} f_{gj}y_g. \qquad (4.10)$$

Для того щоб система (4.6) мала єдине рішення, необхідно і достатньо, щоб матриця C була невиродженою, тобто її визначник повинен бути відмінний від нуля: $|C| \neq 0$. Неважко показати, що ця умова зводиться до умови лінійної незалежності векторів-стовпців матриці F, тобто, для того щоб система (4.6) мала єдине рішення, необхідно і достатньо, щоб вектори-стовпці матриці F були лінійно незалежні. Аналіз рішення системи (4.6) отриманого, наприклад, за формулою Крамера:

$$b_l = |C_l|/|C| \left(\mathrm{l}=\overline{0{,}14}\right), \qquad (4.11)$$

де $|C_l|$ – визначник, що утворюється з $|C|$ при заміні елементів l-го стовпця c_{ij} відповідними вільними членами α_{j} , показує, що значення коефіцієнтів b_{l} залежать від кількості членів рівняння регресії, тобто збільшення або зменшення числа членів рівняння впливає на значення коефіцієнтів усіх включених у рівняння членів. Така невизначеність в оцінюванні коефіцієнтів регресії вкрай утрудняє їхню фізичну інтерпретацію. У тому випадку, коли матриця C діагональна, тобто виконується умова:

$$c_{\mathrm{jl}} = \sum_{\mathrm{g}=1}^{N} f_{\mathrm{gj}} f_{\mathrm{gl}} = 0 \text{ при } j \neq l, \qquad (4.12)$$

система (4.6) розпадається на незалежні нормальні рівняння:

$$\begin{pmatrix} c_{00}b_0=\alpha_{0,} \\ c_{11}b_1=\alpha_{1,} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{14.14}b_{14}=\alpha_{14,} \end{pmatrix} \qquad (4.13)$$

рішення яких знаходиться зі співвідношень:

$$b_j = \alpha_j / c_{jj} \left(j=\overline{0,14}\right). \qquad (4.14)$$

При цьому вдасться позбутися від невизначеності, пов'язаної з неоднозначним оцінюванням коефіцієнтів регресії. Відзначимо, що співвідношення (4.12) є умовою ортогональності векторів-стовпців матриці F незалежних змінних величин. Таким чином, для одержання незалежних одна від одної оцінок коефіцієнтів регресії потрібно спланувати експеримент так, щоб виконувалися умови лінійної незалежності й ортогональності векторів-стовпців матриці F незалежних змінних величин, або, як будемо її називати, *матриці планування* (МП).

4.2 Порядок виконання роботи

1. Відповідно до номеру в списку вибрати дані з таблиці 4.2.

2. Побудувати матриці планування експерименту для двох і трьох незалежних факторів, що варіюються на двох рівнях.

3. Поставити модель об'єкта з двома факторами x_1, x_2 зі значеннями коефіцієнтів b_0, b_1, b_2, b_{12}.

Таблиця 4.2

Вихідні дані

Варіант	a_0	a_1	a_2	a_{12}	a_{11}	a_{22}
1	4	4	5	3	-4	-5
2	4,2	4,1	5,1	3,2	-4,1	-5,2
3	4,1	4,2	5,2	3,1	-4,2	-5,3
4	4,2	4,2	5,1	3,2	-4,1	-5,2
5	4,3	4,1	5,1	3,1	-4,2	-5,1
6	4,2	4,3	5,2	3,3	-4,3	-5,2
7	4,1	4,3	5,3	3,1	-4,2	-5,3
8	4,3	4,2	5	3,3	-4,1	-5,2

9	4,2	4,3	5,1	3,2	-4,3	-5,4
10	4,1	4,4	5,2	3,4	-4,1	-5,1
11	4,3	4,2	5,3	3	-4,2	-5
12	4,2	4,1	5,4	3,3	-4,4	-5,4
13	4,4	4,1	5,2	3,1	-4,2	-5,1
14	3,9	3,9	4,9	3,2	-4,1	-5,2
15	3,9	4	5,1	3,3	-4,4	-5,3
16	3,9	4,2	5,2	3,1	-4,2	-5,1
17	3,8	4,2	5,2	3,2	-4,1	-5,3
18	3,8	4,1	5,3	3,3	-4,3	-5,2
19	3,8	4	5,1	3,4	-4,2	-5,1
20	4,1	3,8	5,2	3,1	-4,1	-5,4
21	4,2	3,8	5	3,2	-4,3	-5,2
22	4,3	3,8	5,3	3,4	-4,3	-5,3
23	4,1	3,9	5,4	3,3	-4,2	-5,1
24	4,2	3,9	5,2	3,2	-4,1	-5
25	4,3	3,9	5,1	3,1	-4	-5,2

4.3 Контрольні запитання

1. Що таке статистичні методи планування активного експерименту?

2. Чому функціональна залежність $\phi(\vec{z})$ не дає точного зв'язку між керованими чинниками і відгуком y_g об'єкта у кожному g-му досліді?

3. Як можна представити математичний опис у вигляді деякого полінома?

4. При яких передумовах задача відшукання оцінок коефіцієнтів рівняння регресії (5.3) за результатами дослідів у N точках факторного простору є типовою задачею множинного регресійного аналізу?

5. Що таке матриця незалежних змінних величин $F\{f_{gj}\}$?

6. Що таке матриця $F^T\{f_{jg}\}$, отримана транспонуванням матриці F?

7. Коли система нормальних рівнянь має єдине розв’язання?

8. Що таке матриця планування?

Практична робота №5

ПОВНИЙ ФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Мета роботи – *вивчення методів планування експериментів для одержання лінійної і неповної ступеневої математичних моделей статики складних об'єктів.*

5.1 Загальні поняття

Для побудови лінійних і неповних степеневих математичних моделей застосовують повний факторний експеримент, що має ортогональною матрицею планування. Математичний опис поверхні відгуку об'єкта в околиці точки базового режиму $\vec{x}_0^T = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ можна одержати варіюванням кожного з чинників x_i на двох рівнях, що відрізняються від базового рівня x_{i0} на величину інтервалу варіювання Δx_i. Інтервал варіювання за кожним керованим чинником вибирають так, щоб приріст величини відгуку y до базового значення y_0 при реалізації $x_{i0} \pm \Delta x_i$ можна було виділити на тлі «шуму» при невеликому числі паралельних дослідів.

Повним факторним експериментом називається експеримент, що реалізує всі можливі неповторювані комбінації рівнів n незалежних керованих чинників, кожний із який варіюють на двох рівнях. Число цих комбінацій $N=2^n$ визначає тип повного факторного експерименту. Для спрощення подальший виклад побудуємо на прикладі планування типу $N=2^3$, тобто на прикладі об'єкта з трьома ($n=3$) незалежними керованими чинниками x_1, x_2, x_3. При плануванні експерименту проводять перетворення розмірних керованих незалежних чинників x_i у безрозмірні, нормовані:

$$z_i = (x_i - x_{i0})/\Delta x_i; \tag{5.1}$$

це дає можливість легко побудувати ортогональну матрицю планування і значно полегшує подальші розрахунки, тому що в цьому випадку верхні і нижні рівні варіювання $z_{\text{iв}}$ й $z_{\text{iн}}$ у відносних одиницях рівні відповідно +1 і -1 незалежно від фізичної природи чинників, значень основних рівнів й інтервалів варіювання чинників Δx_i.

Якщо для трифакторної задача теоретичне рівняння регресії щодо нормованих чинників має вигляд:

$$z_i z_i + \beta_{123} z_1 z_2 z_3, \qquad (5.2)$$

(тобто степенями чинників вище першого можна знехтувати), то повний факторний експеримент дає можливість знайти роздільні оцінки коефіцієнтів β_i. Оскільки зміна вихідного розміру y носить випадковий характер, то є можливість визначити лише вибіркові коефіцієнти регресії b_i, b_{il} для оцінювання теоретичних коефіцієнтів β_i, β_{il}. Процес знаходження моделі (ідентифікації) методом повного факторного експерименту полягає у:

1) плануванні експерименту;

2) проведенні експерименту на об'єкті дослідження;

3) перевірці відтворюваності (однорідності вибіркових дисперсій s_g^2) експерименту;

4) одержанні математичної моделі об'єкта з перевіркою статистичної значимості вибіркових коефіцієнтів регресії;

5) перевірці адекватності математичного опису.

Запис усіх апріорних відомостей про рівняння регресії, запис базових рівнів, кроків варіювання, верхніх і нижніх рівнів керованих чинників, матриці планування, результатів спостережень експерименту, проміжних і кінцевих результатів розрахунку для перевірки відтворюваності експерименту, перевірки значимості коефіцієнтів, перевірки адекватності математичного опису дана у табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Чинники	x_i	x_1	x_2	x_3	Апріорні відомості	Оцінки коефіцієнтів регресії	
Базовий рівень	x_{i0}				$\beta_{11}=0$	$b_0 \to \beta_0$	$b_{12} \to \beta_{12}$
Інтервал варіювання	Δx_i				$\beta_{22}=0$	$b_1 \to \beta_1$	$b_{13} \to \beta_{13}$
Верхній рівень	$x_{iв}$					$b_2 \to \beta_2$	$b_{23} \to \beta_{23}$
Нижній рівень	$x_{iн}$				$\beta_{33}=0$	$b_3 \to \beta_3$	$b_{123} \to \beta_{123}$

Матриця планування і результати розрахунку оцінок коефіцієнтів регресії												Результати спостережень і перевірка відтворюваності експерименту					Перевірка адекватності моделі	
	k_1	k_2	k_3	z_0	z_1	z_2	z_3	z_1z_2	z_1z_3	z_2z_3	$z_1z_2z_3$	y_{gk1}	y_{gk2}	y_{gk3}	$\bar{y}_g$	s_g^2	$\hat{y}_g$	$(\bar{y}_g-\hat{y}_g)^2$
1	21	12	3	+	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1							
2	23	14	7	+	+	-1	-1	-1	-1	+1	+1							
3	8	13	4	+	-1	+	-1	-1	+1	-1	+1							
4	5	16	19	+	+	+	-1	+1	-1	-1	-1							
5	10	24	17	+	-1	-1	+	+1	-1	-1	+1							
6	15	22	6	+	+	-1	+	-1	+1	-1	-1							
7	2	1	11	+	-1	+	+	-1	-1	+1	-1							
8	9	20	18	+	+	+	+	+1	+1	+1	+1							
Оцінки коефіцієнтів регресії				b_0	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}	b_{123}	$\dfrac{\sum_{g=1}^{8} s_g^2}{\max\limits_{g}\left(s_g^2\right)}$					$\dfrac{\sum_{g=1}^{8}\left(\bar{y}_g-\hat{y}_g\right)^2}{s_{ад}^2}$	

Перевірка значимості оцінок коефіцієнтів регресії											G		F	
$q_{зн}$, %	5%	$s^2(b)$									$q_{вос}$, %	5%	$q_{ад}$, %	5%
$\nu_{зн}$	16	$s(b)$									$\nu_{1вос}$	2	$\nu_{1ад}$	
$t_{кр}$	2,119	t									$\nu_{2вос}$	8	$\nu_{2ад}$	
$s^2_{вод}$		Висновок									$G_{кр}$	0,5157	$F_{кр}$	
											Висновок		Висновок	
Рівняння регресії (неповна степенева модель)										d				
$\hat{y} = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_{12} z_1 z_2 + b_{13} z_1 z_3 + b_{23} z_2 z_3 + b_{123} z_1 z_2 z_3$														

Таблиця 5.2

g	z_0	z_1	z_2	z_3	z_1z_2	z_1z_3	z_2z_3	$z_1z_2z_3$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

1. **Планування експерименту.** Матрицю планування повного факторного експерименту можна представити і вигляді табл. 5.2. Її складають за такими правилами:

1. Кожен g-й рядок матриці містить набір координат z_{ig} точки, у якій проводиться g-й дослід ($i=\overline{1,n}$; $g=\overline{1,N}$).

2. Як указувалося вище, уводять фіктивну змінну величину z_o =+1.

3. Оскільки змінні величини z_i приймають лише значення +1 і -1, усі взаємодії z_iz_l (i; $l = 1, 2, 3$; i $\neq l$) можуть приймати лише такі ж значення.

4. У першому рядку (g=1) усі керовані чинники вибирають на нижньому рівні, тобто z_i=-1. Наступні g-і варіанти варіювання при укладанні матриці планування вибирають так: при построковому переборі усіх варіантів частота зміни знака чинників для кожного наступного чинника z_{i+1} вдвічі менше, ніж для попереднього z_i (див. табл. 5.2).

Три стовпці керованих чинників утворять власне план експерименту (обведено жирною рисою), а інші стовпці матриці планування створюються перемножуванням відповідних значень керованих чинників і необхідні для розрахунку відповідних коефіцієнтів при взаємодіях.

План повного факторного експерименту типу 2^4 (n – 4) можна побудувати або зазначеним вище способом, або на базі плану повного факторного експерименту типу 2^3, повторивши його двічі: один раз при величині

$z_4 = -1$, другий раз при $z_4 = +1$ Аналогічно можуть бути отримані плани для якого завгодно великого числа *n* незалежних керованих чинників.

Аналізуючи табл. 5.2, помітимо, що матриця планування має лінійно незалежні, попарно ортогональні вектори-стовпці, звідки випливає діагональність матриці *С* коефіцієнтів системи нормальних рівнянь, а отже, і взаємна незалежність оцінок коефіцієнтів рівняння регресії, не говорячи вже про простоту розрахунку цих оцінок. Необхідно відзначити, що в тих випадках, коли вплив на відгук змінних величин типу z_i^2 стає істотним і з'являється необхідність обчислення оцінок коефіцієнтів при них, повний факторний експеримент не дає можливості визначити роздільні оцінки таких коефіцієнтів, як b_0, $b_i(\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}})$, оскільки відповідні вектори-стовпці матриці планування рівні між собою, а тому ця матриця має лінійно залежні вектори-стовпці.

2. Проведення експерименту на об'єкті дослідження. Оскільки зміна відгуку у носить випадковий характер, то в кожній точці x_{g} доводиться проводити m паралельних дослідів і результати спостережень y_{gi}, y_{gz}, ..., y_{gm} усереднювати:

$$\vec{y}_g = \frac{1}{m}\sum_{\mathrm{k}=1}^{m} y_{\mathrm{gk}}. \qquad (5.3)$$

Нехай у розглянутому випадку $m = 3$. Перед реалізацією плану на об'єкті необхідно рандомізувати варіанти варіювання чинників, тобто за допомогою таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел визначити послідовність реалізації варіантів варіювання плану в N_{m} дослідах. Рандомізацію проводять таким чином. У таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел (див. Додаток І) вибирають будь-який стовпець, із якого в порядку проходження беруть числа від 1 до N_{m} і , записують послідовно в m стовпці k_1,k_2,...,k_m табл. 5.1 (кожне число береться лише один раз). Якщо в однім стовпці таблиці Додатка I не опинилося всіх N_{m} потрібних чисел, то переходять до наступного її стовпця. Нехай, наприклад, k_1=8 при g =3; це значить, що третій варіант варіювання реалізується в експерименті восьмим за порядком. Результати спостережень експерименту відповідно варіантам варіювання плану записують у стовпці y_{gk1}, y_{gk2}, y_{gk3}.

3. **Перевірка відтворюваності експерименту** є не що інше, як перевірка виконання другої передумови регресійного аналізу про однорідність вибіркових дисперсій s_g^2. Задача полягає в перевірці гіпотези про рівність генеральних дисперсій $\sigma^2\{y_1\}$=$\sigma^2\{y_2\}$ = ...,$\sigma^2\{y_N\}$ при дослідах відповідно у точках $\vec{x}_1, \vec{x}_2$,..., $\vec{x}_N$. Оцінки дисперсій знаходять за відомою формулою:

$$s_g^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{\mathrm{k}=1}^{m}\left(y_{\mathrm{gk}} - \bar{y}_g\right)^2. \qquad (5.4)$$

Оскільки всі оцінки дисперсій отримані за вибірками однакового обсягу m = 3, то число степіней вільності для усіх них однаково і складає:

$$\nu_{1\text{вос}}=\mathrm{m}-1. \qquad (5.5)$$

У цьому випадку для перевірки гіпотези про однорідність оцінок s_g^2 дисперсій варто користуватися *критерієм Кохрэна,* що заснований на законі розподілу відношення максимальної оцінки дисперсії до суми всіх порівнюваних оцінок дисперсій, тобто:

$$\mathrm{G}=\frac{\max\limits_{g}\{s_g^2\}}{\sum_{\mathrm{g}=1}^{N} s_g^2\{y\}^2}. \qquad (5.6)$$

Якщо обчислене за даними експерименту (емпіричне) значення критерію G виявиться менше критичного значення $G_{Кр}$, знайденого за таблицею для $\nu_{1вос}= m$ - 1 і $\nu_{2вос} = N$ (у даному випадку $\nu_{1вос}$= 2 і $\nu_{2вос}$= 8) і обраного рівня значимості $q_{вос}$ [%] (звичайно 5 %), то гіпотеза про однорідність вибіркових дисперсій відповідає результатам спостережень. При цьому всю групу вибіркових дисперсій s_g^2 можна вважати оцінками для однієї і тієї ж генеральної дисперсії $\sigma^2\{y\}$ відтворюваності експерименту, звідки найкраща її оцінка має вигляд:

$$s_{вос}^2\{y\} = \frac{1}{N}\sum_{g=1}^{N} s_g^2\{y\} \qquad (5.7)$$

з числом степенів вільності

$$\nu_{зн}=\mathrm{N}(m-1). \qquad (5.8)$$

Якщо перевірка відтворюваності експерименту дала негативний результат, то залишається визнати його невідтворюваність щодо керованих чинників унаслідок наявності несприятливих флуктуацій некерованих і неконтрольованих чинників. При цьому слід або збільшити число паралельних дослідів для варіантів варіювання з великими значеннями вибіркових дисперсій s_g^2, або використовувати надалі модифікацію методу найменших квадратів, придатну при невиконанні передумови про відтворюваність експерименту.

4. Отримання математичної моделі об'єкта. Як уже вказувалося вище, користуючись методом повного факторного експерименту, можна одержати опис досліджуваного об'єкта. При повному факторному експерименті утворюються незалежні оцінки b_0, b_i b_{il}, що відповідають коефіцієнтам

β_0, β_i, β_{il}, тобто $b_0 \to \beta_0$, $b_i \to \beta_i$, $b_{\text{il}} \to \beta_{\text{il}}$. Ці оцінки легко знайти за формулами:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{\text{g}=1}^{N} z_{0g}\bar{y}_g,\ b_i = \frac{1}{N}\sum_{\text{g}=1}^{N} z_{\text{ig}}\bar{y}_g\ (\text{i}=\overline{1,\text{n}}),$$

$$b_{\text{il}} = \frac{1}{N}\sum_{\text{g}=1}^{N} z_{\text{ig}}z_{\text{lg}}\bar{y}_g\ \left(\text{i;l}=\overline{1,\text{n}};\text{i} \neq l\right). \qquad (5.9)$$

Після визначення оцінок b коефіцієнтів регресії необхідно перевірити гіпотези про їхню значимість, тобто перевірити відповідні нуль-гіпотези $\beta = 0$. Перевірку таких гіпотез здійснюють за допомогою *критерію Стюдента,* емпіричне значення якого:

$$\text{t}=|b|/s\,\{b\}, \qquad (5.10)$$

де

$$s^2\{b\} = \frac{1}{\text{Nm}}\, s^2_{\text{вос}}\{y\} \qquad (5.11)$$

– дисперсія оцінки b коефіцієнта; N – число точок факторного простору, у яких проводиться експеримент; m – число паралельних дослідів у цих точках. Якщо знайдена величина параметра t перевищує значення $t_{\text{кр}}$, визначене з Додатка V для числа степенів вільності $\nu_{\text{зн}}=\text{N}(m-1)$, при заданому рівні значимості $q_{\text{зн}}$ (звичайно 5%), тобто $\text{sign}\left(t - t_{\text{кр}}\right)$=+1, то перевіряємо нуль-гіпотезу H_0:β=0 відхиляють і відповідну оцінку b коефіцієнта визнають значимою.

У противному випадку, тобто при $\text{sign}\left(t - t_{\text{кр}}\right)$=-1, нуль-гіпотезу не відхиляють і оцінку b вважають статистично незначущою, тобто $\beta = 0$.

Статистична значимість оцінки b_i коефіцієнта регресії може бути обумовлена такими причинами:

1) даний i-й чинник не має функціонального зв'язку з відгуком y, тобто $\beta_i = 0$;

2) рівень x_{i0} базового режиму $\vec{x}_0$ знаходиться в точці локального екстремуму функції відгуку за чинником x_i і тоді $\beta_i = \frac{\partial y}{\partial z_i} = 0$;

3) інтервал варіювання Δx_i вибрано малим;

4) унаслідок впливу некерованих і неконтрольованих чинників велика помилка відтворюваності експерименту.

Ортогональне планування дозволяє визначати довірчі границі незалежно для кожного з коефіцієнтів регресії. Тому якщо якась з оцінок коефіцієнтів виявиться незначущою, то її можна відкинути без перерахування всіх інших. Після цього математичну модель об'єкта складають у вигляді рівняння зв'язку відгуку y і чинників z_i, що включає тільки значимі оцінки коефіцієнтів.

5. Перевірка адекватності математичного опису. Щоб перевірити гіпотезу про адекватність математичного опису дослідним даним, досить оцінити відхилення передбаченої за отриманим рівнянням регресії величини відгуку $\hat{y}_g$ від результатів спостережень $\bar{y}_g$ у тих самих g-х точках факторного простору. Розсіювання результатів спостережень поблизу рівняння регресії, що оцінює дійсну функцію відгуку, можна охарактеризувати за допомогою дисперсії адекватності:

$$s^2_{\text{ад}} = \frac{m}{N-d} \sum_{g=1}^{N} \left(\bar{y} - \hat{y}_g\right)^2, \tag{5.12}$$

де d – число членів апроксимувального полінома. Дисперсія адекватності визначається з числом степенів вільності:

$$\nu_{ад}=N-d. \quad (5.13)$$

Перевірка гіпотези про адекватність полягає, по суті справи, у з'ясуванні співвідношення між дисперсією адекватності $s^2_{ад}$ і оцінкою дисперсії відтворюваності відгуку $s^2_{вос}$. Якщо ці оцінки дисперсій однорідні, то математичний опис адекватно представляє результати досліду; якщо ж ні, то опис вважається неадекватним. Перевірку гіпотези про адекватність здійснюють із використанням *F-критерію Фішера.* Критерій Фішера дозволяє перевірити гіпотезу про однорідність двох вибіркових дисперсій $s^2_{ад}$ і $s^2_{вос}\{y\}$. У тому випадку, якщо $s^2_{ад}>s^2_{вос}\{y\}$, F-критерій характеризується відношенням:

$$F=s^2_{ад}/s^2_{вос}\{y\}. \quad (5.14)$$

обчислене за результатами спостережень емпіричне значення критерію F менше критичного $F_{кр}$, знайденого з Додатку VI для відповідних степенів вільності:

$$\nu_{1ад}=N-d,\ \nu_{2ад}=\nu_{зн}=N(m-1) \quad (5.15)$$

при заданому рівні значимості $q_{ад}$, то гіпотезу про адекватність не відхиляють. У противному випадку гіпотезу відхиляють і математичний опис визнається неадекватним.

Перевірка адекватності можлива при $\nu_{1ад}>0$. Якщо число N варіантів варіювання плану повного факторного експерименту дорівнює числу всіх значимих оцінок коефіцієнтів регресії *(N = d),* то для перевірки гіпотези про адекватність математичного опису степенів вільності не залишається ($\nu_{1ад}$ =0). Якщо ж деякі оцінки коефіцієнтів регресії виявилися незначущими, то число d членів рівняння, що перевіряється, у цьому випадку менше *числа N* варіантів *варіювання (N >* d) і для перевірки гіпотези про адекватність залишиться одна або декілька степенів вільності ($\nu_{1ад}$> 0).

У тому випадку, коли гіпотеза про адекватність відхиляється, необхідно переходити до складнішої форми математичного опису або, якщо це можливо, проводити експеримент з меншим інтервалом варіювання Δx_i. Слід зазначити, що максимальна величина інтервалу варіювання визначається умовою адекватного опису об'єкта в області варіювання. Якщо при великих інтервалах варіювання математична модель неадекватна, то виникають систематичні помилки у визначенні коефіцієнтів, для зменшення яких варто звузити область варіювання. Однак зі зменшенням інтервалу варіювання з'являється цілий ряд нових труднощів: зростає відношення перешкоди до корисного сигналу, що призводить до необхідності збільшувати число паралельних дослідів для виділення корисного сигналу на тлі шуму, тобто зменшуються абсолютні значення оцінок b_i коефіцієнтів, величини котрих безпосередньо залежать від Δx_i (для рівняння з нормованими чинниками z_i), і оцінки коефіцієнтів можуть стати статистично незначущими.

Для вибору інтервалу варіювання проводять попередні експерименти. Інтервал варіювання можна вибирати рівним 0,05 – 0,3 від припустимого діапазону варіювання чинників, тобто область варіювання складає приблизно 10 – 60% від усього діапазону. Початкову точку варіювання (базову точку) вибирають якомога ближче до центру області факторного простору, у якій шукається математичний опис об'єкта (або області обмежень).

5.2 Порядок виконання роботи

1. Відповідно до номеру в списку вибрати дані з таблиці 5.3.

2. Побудувати матриці планування експерименту для двох і трьох незалежних факторів, що варіюються на двох рівнях.

Таблиця 5.3

Вихідні дані

Варіант	a_0	a_1	a_2	a_{12}	a_{11}	a_{22}	x_{10}	x_{20}	□x_1
1	4	4	5	3	-4	-5	15	85	15
2	4,2	4,1	5,1	3,2	-4,1	-5,2	16	84	14
3	4,1	4,2	5,2	3,1	-4,2	-5,3	14	86	16
4	4,2	4,2	5,1	3,2	-4,1	-5,2	16	84	14
5	4,3	4,1	5,1	3,1	-4,2	-5,1	14	86	15
6	4,2	4,3	5,2	3,3	-4,3	-5,2	15	85	14
7	4,1	4,3	5,3	3,1	-4,2	-5,3	14	86	16
8	4,3	4,2	5	3,3	-4,1	-5,2	16	87	17
9	4,2	4,3	5,1	3,2	-4,3	-5,4	14	84	16
10	4,1	4,4	5,2	3,4	-4,1	-5,1	15	86	13
11	4,3	4,2	5,3	3	-4,2	-5	17	83	14
12	4,2	4,1	5,4	3,3	-4,4	-5,4	13	87	16
13	4,4	4,1	5,2	3,1	-4,2	-5,1	14	84	14
14	3,9	3,9	4,9	3,2	-4,1	-5,2	16	86	15
15	3,9	4	5,1	3,3	-4,4	-5,3	14	84	16
16	3,9	4,2	5,2	3,1	-4,2	-5,1	16	85	14
17	3,8	4,2	5,2	3,2	-4,1	-5,3	15	85	15
18	3,8	4,1	5,3	3,3	-4,3	-5,2	14	86	16
19	3,8	4	5,1	3,4	-4,2	-5,1	17	84	14
20	4,1	3,8	5,2	3,1	-4,1	-5,4	16	83	16
21	4,2	3,8	5	3,2	-4,3	-5,2	15	86	18
22	4,3	3,8	5,3	3,4	-4,3	-5,3	14	83	17
23	4,1	3,9	5,4	3,3	-4,2	-5,1	15	82	16
24	4,2	3,9	5,2	3,2	-4,1	-5	18	85	15
25	4,3	3,9	5,1	3,1	-4	-5,2	17	86	14

3. Поставити модель об'єкта з двома факторами x_1, x_2 зі значеннями коефіцієнтів b_0, b_1, b_2, b_{12}.

5.3 Контрольні запитання

1. Що називається повним факторними експериментами?

2. Як вибираються чинники планування, їхні основні (базові) рівні й інтервали варіювання?

3. Вказати порядок проведення експерименту методом повного факторного експерименту.

4. Як складається матриця планування повного факторного експерименту?

5. Як перевірити відтворюваність варіантів варіювання повного факторного експерименту?

6. За яких умовах не дотримується вимога відтворюваності експерименту і як варто діяти у цьому випадку?

Практична робота №6

ДРОБНІ ФАКТОРНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Мета роботи – *вивчення методів планування експериментів для одержання лінійної і неповної ступеневої математичних моделей статики складних об'єктів.*

6.1 Загальні поняття

У багатьох практичних задачах ідентифікації вплив взаємодій (добутків чинників) другого і вищих порядків відсутній або ним можна знехтувати. Крім того, на перших етапах дослідження часто потрібно одержати в першому наближенні лише лінійну апроксимацію досліджуваного рівняння зв'язку при мінімальній кількості дослідів. Тому неефективно використовувати повний факторний експеримент для оцінювання коефіцієнтів лише при лінійних членах і деяких парних здобутках через реалізацію великого числа варіантів варіювання (2^n), особливо при великому числі чинників n. При лінійному рості числа незалежних чинників число варіантів варіювання для повного факторного експерименту зростає по показовому законі, у результаті чого на перевірку гіпотези про адекватність залишається надмірно багато степенів вільності.

Дробним факторним експериментом (ДФЕ) називається експеримент, що реалізує частину (дробную репліку) повного факторного експерименту. ДФЕ дозволяє одержати, наприклад, лінійне наближення шуканої функціональної залежності $M\{y\}=\phi(\vec{x})$ в деякій невеликій околиці точки базового режиму при мінімумі дослідів.

1. Планування експерименту. Для вирішення трифакторної (n = 3) задача регресії у лінійному наближенні можна обмежитися чотирма варіантами варіювання, якщо в плануванні ПФЕ типу 2^2 здобуток $z_1 z_2$ прирівняти третьому незалежному чиннику z_3. Таке планування, подане матрицею (табл. 6.1), дозволяє знайти вільний член b_0 і три оцінки коефіцієнтів регресії при лінійних членах b_1, b_2, b_3 (із чотирьох дослідів не можна одержати більше чотирьох оцінок коефіцієнтів регресії).

Застосування ДФЕ завжди зв'язано зі змішуванням, тобто зі спільним оцінюванням декількох теоретичних коефіцієнтів математичної моделі. У розглянутому випадку, якщо коефіцієнти регресії b_{il} при парних здобутках відмінні від нуля, кожний зі знайдених коефіцієнтів b_i слугує оцінкою двох теоретичних коефіцієнтів регресії:

$$b_0 \to \beta_0+\beta_{123}\ ;\ b_1 \to \beta_1+\beta_{23};\ b_2 \to \beta_2+\beta_{13};\ b_3 \to \beta_3+\beta_{12}. \quad (6.1)$$

Дійсно, зазначені теоретичні коефіцієнти у такому плануванні не можуть бути оцінені роздільно, оскільки стовпці МП для лінійних членів і парних здобутків збігаються (повністю корельовані). Розглянутий план ДФЕ представляє половину плану повного факторного експерименту типу 2^3 і називається *напіврепликою* від повного факторного експерименту типу 2^3 або *плануванням типу* $N = 2^{3-1}$ (див. табл. 6.1).

Таблиця 6.1

g	z_0	z_1	z_2	z_3	$z_1 z_2$	$z_1 z_3$	$z_2 z_3$	$z_1 z_2 z_3$
1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Для правильного планування ДФЕ необхідно використовувати всі отримані раніше відомості теоретичного й інтуїтивного характеру про об'єкт і виділити ті чинники і здобутки чинників, вплив яких на відгук істотно. При цьому змішування потрібно робити так, щоб лінійні коефіцієнти β_0, β_1,…,β_n були змішані з коефіцієнтами при взаємодіях найвищого порядку (тому що звичайно вони в моделі відсутні), або при тих взаємодіях, про котрі апріорі відомо, що вони не здійснюють впливу на відгук. Отже, неприпустима довільна розбивка плану ПФЕ типу 2^3 на дві частини для виділення напіврепліки типу 2^{3-1}.

При великому числі *n* чинників для одержання лінійного наближення можна побудувати дробні репліки високої степені дробності. Так, при $n = 7$ можна скласти дробну репліку на основі ПФЕ типу 2^3, прирівнявши чотири з семи чинників до взаємодій трьох інших чинників: парним і потрійному. Будемо позначати тип дробної репліки записом 2^{n-p}, якщо *p* чинників прирівняні до здобутків інших *n* - *p* чинників.

План ДФЕ можна побудувати, прирівнюючи чинники різним взаємодіям (парним, потрійним тощо), зрозуміло, при цьому змінюється система спільних оцінок теоретичних коефіцієнтів. Для одержання системи спільних оцінок і аналізу розподільчої здатності дробних реплік зручно користуватися поняттями генерувального і визначального співвідношень. *Генерувальні співвідношення* слугує для побудови дробної репліки. Так, у розглянутому плануванні ми задавали напіврепліку плану повного факторного експерименту типу 2^3 за допомогою *генерувального* співвідношення $z_3=z_1z_2$.

Визначальним співвідношенням називається співвідношення, що задає елементи першого стовпця матриці планування для фіктивної змінної величини (усі вони завжди рівні 1). Вираз визначального співвідношення у розглянутому випадку утворюється множенням лівої і правої частин приведеного генерувального співвідношення на z_3, тобто $1=z_1z_2z_3$, тому що завжди $z_i^2=1$.

Знання визначального співвідношення дозволяє знайти всю систему спільних оцінок без вивчення матриці планування ДФЕ. Співвідношення, що задають ці оцінки, можна знайти, послідовно перемножаючи незалежні чинники на визначальне співвідношення:

$$z_0 = z_1 z_2 z_3\ ;\ z_1 = z_2 z_3,\ z_2 = z_1 z_3,\ z_3 = z_1 z_2; \qquad (6.2)$$

звідси легко знаходяться змішувані теоретичні коефіцієнти регресії і їхні оцінки:

$$b_0 \to \beta_0 + \beta_{123};\ b_1 \to \beta_1 + \beta_{23};\ b_2 \to \beta_2 + \beta_{13};\ b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}. \quad (6.3)$$

Якщо апріорі можна прийняти, що коефіцієнти при всіх парних і потрійних взаємодіях рівні нулю, то реалізація цієї напіврепліки дозволить одержати роздільні оцінки для всіх чотирьох лінійних коефіцієнтів регресії. Розподільча здатність напівреплік визначається їхніми генерувальними співвідношеннями. Розподільча здатність тим вища, чим вищий порядок взаємодій, з коефіцієнтами яких змішані лінійні коефіцієнти. Вона збільшується для головних напівреплік зі зростанням числа незалежних чинників.

Для чвертьрепліки у п'ятифакторному плануванні типу 2^{5-2} повинні бути задані два генерувальні співвідношення, наприклад $z_4 = z_1 z_2 z_3$; $z_5 = z_1 z_2$, причому вважаємо β_{123}=0, тобто x_1, x_2, x_3 усі разом не взаємодіють, і β_{12}=0, тобто x_1 і x_2 також не взаємодіють. Визначальні співвідношення для цієї репліки, відповідно до приведених вище правил, мають вигляд $1 = z_1 z_2 z_3 z_4$; $1 = z_1 z_2 z_5$. Якщо для дробної репліки мають місце два (або більш) визначальні співвідношення, то їх перемножують між собою, використовуючи всі можливі комбінації. У розглянутому випадку є одна нова комбінація: $1 = z_3 z_4 z_5$.

Узагальнювальне визначальне співвідношення побудоване на основі всіх отриманих визначальних співвідношень, цілком характеризує розподільчу здатність реплік високої степені дробності. Так, у даному випадку:

$$1 = z_1 z_2 z_3 z_4 = z_1 z_2 z_5 = z_3 z_4 z_5 . \quad (6.4)$$

Спільні оцінки тут визначаються допоміжними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
&z_0 = z_1 z_2 z_3 z_4 = z_1 z_2 z_5 = z_3 z_4 z_5 ,\\
&z_1 = z_2 z_3 z_4 = z_2 z_5 = z_1 z_3 z_4 z_5 ,\\
&z_2 = z_1 z_3 z_4 = z_1 z_5 = z_2 z_3 z_4 z_5 ,\\
&z_3 = z_1 z_2 z_4 = z_1 z_2 z_3 z_5 = z_4 z_5 ,\\
&z_4 = z_1 z_2 z_3 = z_1 z_2 z_4 z_5 = z_3 z_5, \qquad (6.5)\\
&z_5 = z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 = z_1 z_2 = z_3 z_4,\\
&z_1 z_3 = z_2 z_4 = z_2 z_3 z_5 = z_1 z_2 z_5,\\
&z_1 z_4 = z_2 z_3 = z_2 z_4 z_5 = z_1 z_3 z_5.
\end{aligned}$$

Ці допоміжні співвідношення дозволяють установити, які стовпці МП виявляться лінійно залежними і, отже, спільною оцінкою яких теоретичних коефіцієнтів є той або інший вибірковий коефіцієнт регресії:

$$\begin{aligned}
&b_0 \rightarrow \beta_0 + \beta_{1234} + \beta_{125} + \beta_{345} ,\\
&b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234} + \beta_{25} + \beta_{1345} ,\\
&b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134} + \beta_{15} + \beta_{2345} ,\\
&b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124} + \beta_{1235} + \beta_{45} ,
\end{aligned}$$

$$b_4 \rightarrow \beta_4+\beta_{124}+\beta_{1245}+\beta_{35}, \qquad (6.5а)$$
$$b_5 \rightarrow \beta_5+\beta_{12345}+\beta_{12}+\beta_{34},$$
$$b_{13} \rightarrow \beta_{13}+\beta_{24}+\beta_{235}+\beta_{145},$$
$$b_{14} \rightarrow \beta_{14}+\beta_{23}+\beta_{245}+\beta_{135}.$$

Розподільча здатність цієї чвертьрепліки невисока, тому що всі теоретичні лінійні коефіцієнти регресії змішані з коефіцієнтами при парних взаємодіях. Варто мати на увазі, що план ДФЕ завжди можна доповнити до плану ПФЕ відсутніми дробними репліками. У даному прикладі для інших трьох чвертьреплік генерувальні співвідношення запишуться у вигляді:

$$\{z_4 = z_1 z_2 z_3;\}$$
$$\{z_4 = -z_1 z_2 z_3;\} \quad (6.6)$$
$$\{z_4 = -z_1 z_2 z_3;\}$$

а узагальнювальні визначальні співвідношення – у вигляді:

$$1 = z_1 z_2 z_3 z_4 = -z_1 z_2 z_5 = -z_3 z_4 z_5 \,,$$
$$1 = -z_1 z_2 z_3 z_4 = z_1 z_2 z_5 = -z_3 z_4 z_5 \,, \qquad (6.7)$$
$$1 = -z_1 z_2 z_3 z_4 = -z_1 z_2 z_5 = z_3 z_4 z_5 \,.$$

Здійснення цих доповнювальних чвертьреплік означає реалізацію ПФЕ в цілому і, отже, роздільне оценивание всіх теоретичних коефіцієнтів регресії (якщо апріорі відомо, що b_{ii}=0, b_{iii}=0).

2. Проведення експерименту на об'єкті дослідження. Оскільки зміна відгуку y носить випадковий характер, то в кожній точці $\vec{x}_g$ доводиться проводити m паралельних дослідів і результати спостережень y_{gi}, y_{gz}, ..., y_{gm} усереднювати:

$$\vec{y}_g = \frac{1}{m}\sum_{\mathrm{k}=1}^{m} y_{\mathrm{gk}}. \qquad (6.8)$$

Нехай у розглянутому випадку m = 3. Перед реалізацією плану на об'єкті необхідно рандомізувати варіанти варіювання чинників, тобто за допомогою таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел визначити послідовність реалізації варіантів варіювання плану в N_{m} дослідах. Рандомізацію проводять таким чином. У таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел (див. Додаток І) вибирають будь-який стовпець, із якого в порядку проходження беруть числа від 1 до N_{m} і , записують послідовно в m стовпці k_1,k_2,...,k_m табл. 6.1 (кожне число береться лише один раз). Якщо в однім стовпці таблиці Додатка І не опинилося всіх N_{m} потрібних чисел, то переходять до наступного її стовпця. Нехай, наприклад, k_1= 8 при g = 3; це значить, що третій варіант варіювання реалізується в експерименті восьмим за порядком. Результати спостережень експерименту відповідно варіантам варіювання плану записують у стовпці y_{gk1}, y_{gk2}, y_{gk3}.

3. **Перевірка відтворюваності експерименту** є не що інше, як перевірка виконання другої передумови регресійного аналізу про однорідність вибіркових дисперсій s_g^2. Задача полягає в перевірці гіпотези про рівність генеральних дисперсій $\sigma^2\{y_1\}$=$\sigma^2\{y_2\} =$ ...,$\sigma^2\{y_N\}$ при дослідах відповідно у точках $\vec{x}_1, \vec{x}_2$,..., $\vec{x}_N$. Оцінки дисперсій знаходять за відомою формулою:

$$s_g^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{\mathrm{k}=1}^{m}\left(y_{\mathrm{gk}} - \bar{y}_g\right)^2. \qquad (6.9)$$

Оскільки всі оцінки дисперсій отримані за вибірками однакового обсягу m = 3, то число степенів вільності для усіх них однаково і складає:

$$\nu_{1\text{вос}}=\mathrm{m}-1. \qquad (6.10)$$

У цьому випадку для перевірки гіпотези про однорідність оцінок s_g^2 дисперсій варто користуватися *критерієм Кохрена,* що заснований на законі розподілу відношення максимальної оцінки дисперсії до суми всіх порівнюваних оцінок дисперсій, тобто:

$$\mathrm{G}=\frac{\max\limits_{g}\{s_g^2\}}{\sum_{\mathrm{g}=1}^{N} s_g^2\{y\}^2}. \qquad (6.11)$$

Якщо обчислене за даними експерименту (емпіричне) значення критерію G виявиться менше критичного значення $G_{\text{Кр}}$, знайденого за таблицею для $\nu_{1\text{вос}}=m$-1 і $\nu_{2\text{вос}}=N$ (у даному випадку $\nu_{1\text{вос}}$= 2 і $\nu_{2\text{вос}}$= 8) і обраного рівня значимості $q_{\text{вос}}$ [%] (звичайно 5 %), то гіпотеза про однорідність вибіркових дисперсій відповідає результатам спостережень. При цьому всю групу вибіркових дисперсій s_g^2 можна вважати оцінками для однієї і тієї ж генеральної дисперсії $\sigma^2\{y\}$ відтворюваності експерименту, звідки найкраща її оцінка має вигляд:

$$s_{\text{вос}}^2\{y\}=\frac{1}{N}\sum_{\mathrm{g}=1}^{N} s_g^2\{y\} \qquad (6.12)$$

з числом степенів вільності

$$\nu_{\text{зн}}=\mathrm{N}(m-1). \qquad (6.13)$$

Якщо перевірка відтворюваності експерименту дала негативний результат, то залишається визнати його невідтворюваність щодо керованих чинників унаслідок наявності несприятливих флуктуацій некерованих і неконтрольованих чинників. При цьому слід або збільшити число паралельних дослідів для варіантів варіювання з великими значеннями вибіркових дисперсій s_g^2, або використовувати надалі модифікацію методу найменших квадратів, придатну при невиконанні передумови про відтворюваність експерименту.

4. Отримання математичної моделі об'єкта. Як уже вказувалося вище, користуючись методом ДФЕ, можна одержати опис досліджуваного об'єкта. При ДФЕ утворюються незалежні оцінки b_0, b_i b_{il}, що відповідають коефіцієнтам β_0, β_i, β_{il}, тобто $b_0 \to \beta_0$, $b_i \to \beta_i$, $b_{\text{il}} \to \beta_{\text{il}}$. Ці оцінки легко знайти за формулами:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{g}=1}^{N} z_{0g}\bar{y}_g,\ b_i = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{g}=1}^{N} z_{\mathrm{ig}}\bar{y}_g\ \left(\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}\right),$$

$$b_{\mathrm{il}} = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{g}=1}^{N} z_{\mathrm{ig}}z_{\mathrm{lg}}\bar{y}_g\ \left(\mathrm{i;l}=\overline{1,\mathrm{n}};\mathrm{i} \neq l\right). \quad (6.14)$$

Після визначення оцінок b коефіцієнтів регресії необхідно перевірити гіпотези про їхню значимість, тобто перевірити відповідні нуль-гіпотези $\beta = 0$. Перевірку таких гіпотез здійснюють за допомогою *критерію Стюдента,* емпіричне значення якого:

$$\mathrm{t} = |b|/s\,\{b\}, \quad (6.15)$$

де

$$s^2\{b\} = \frac{1}{\mathrm{Nm}} s^2_{\text{вос}}\{y\} \qquad (6.16)$$

– дисперсія оцінки b коефіцієнта;

N – число точок факторного простору, у яких проводиться експеримент;

m – число паралельних дослідів у цих точках.

Якщо знайдена величина параметра t перевищує значення $t_{\text{кр}}$, визначене з Додатка V для числа степенів вільності $\nu_{\text{зн}}=\mathrm{N}(m-1)$, при заданому рівні значимості $q_{\text{зн}}$ (звичайно 5%), тобто $\mathrm{sign}(t-t_{\text{кр}})$=+1, то перевіряємо нуль-гіпотезу H_0:β=0 відхиляють і відповідну оцінку b коефіцієнта визнають значимою.

У противному випадку, тобто при $\mathrm{sign}(t-t_{\text{кр}})$=-1, нуль-гіпотезу не відхиляють і оцінку b вважають статистично незначимою, тобто β = 0.

Статистична незначимість оцінки b_i коефіцієнта регресії може бути обумовлена такими причинами:

1) даний i-й чинник не має функціонального зв'язку з відгуком y, тобто $\beta_i = 0$;

2) рівень x_{i0} базового режиму $\vec{x}_0$ знаходиться в точці локального екстремуму функції відгуку за чинником x_i і тоді $\beta_i = \frac{\partial y}{\partial z_i} = 0$;

3) інтервал варіювання Δx_i вибрано малим;

4) унаслідок впливу некерованих і неконтрольованих чинників велика помилка відтворюваності експерименту.

Ортогональне планування дозволяє визначати довірчі границі незалежно для кожного з коефіцієнтів регресії. Тому якщо якась з оцінок коефіцієнтів виявиться незначимою, то її можна відкинути без перерахування всіх інших. Після цього математичну модель об'єкта складають у вигляді рівняння зв'язку відгуку y і чинників z_i, що включає тільки значимі оцінки коефіцієнтів.

5. Перевірка адекватності математичного опису. Щоб перевірити гіпотезу про адекватність математичного опису дослідним даним, досить оцінити відхилення передбаченої за отриманим рівнянням регресії величини відгуку $\hat{y}_g$ від результатів спостережень $\bar{y}_g$ у тих самих g-х точках факторного простору. Розсіювання результатів спостережень поблизу рівняння регресії, що оцінює дійсну функцію відгуку, можна охарактеризувати за допомогою дисперсії адекватності:

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{m}{N-d}\sum_{\text{g}=1}^{N}\left(\bar{y} - \hat{y}_g\right)^2, \qquad (6.17)$$

де d – число членів апроксимувального полінома. Дисперсія адекватності визначається з числом степенів вільності:

$$v_{\text{ад}} = N - d. \qquad (6.18)$$

Перевірка гіпотези про адекватність полягає, по суті справи, у з'ясуванні співвідношення між дисперсією адекватності $s_{\text{ад}}^2$ і оцінкою дисперсії відтворюваності відгуку $s_{\text{вос}}^2$. Якщо ці оцінки дисперсій однорідні, то математичний опис адекватно представляє результати досліду; якщо ж ні, то опис вважається неадекватним. Перевірку гіпотези про адекватність здійснюють із використанням *F-критерію Фішера*. Критерій Фішера дозволяє перевірити гіпотезу про однорідність двох вибіркових дисперсій $s_{\text{ад}}^2$ і $s_{\text{вос}}^2\{y\}$. У тому випадку, якщо $s_{\text{ад}}^2 > s_{\text{вос}}^2\{y\}$, F-критерій характеризується відношенням:

$$F = s^2_{ад} / s^2_{вос}\{y\}. \qquad (6.19)$$

обчислене за результатами спостережень емпіричне значення критерію F менше критичного $F_{кр}$, знайденого з Додатку VI для відповідних степенів вільності:

$$\nu_{1ад} = N - d, \nu_{1ад} = \nu_{зн} = N\,(m - 1) \qquad (6.20)$$

при заданому рівні значимості $q_{ад}$, то гіпотезу про адекватність не відхиляють. У противному випадку гіпотезу відхиляють і математичний опис визнається неадекватним.

Перевірка адекватності можлива при $\nu_{1ад} > 0$. Якщо число N варіантів варіювання плану ДФЕ дорівнює числу всіх значимих оцінок коефіцієнтів регресії *($N = d$),* то для перевірки гіпотези про адекватність математичного опису степенів вільності не залишається ($\nu_{1ад} = 0$). Якщо ж деякі оцінки коефіцієнтів регресії виявилися незначимими, то число d членів рівняння, що перевіряється, у цьому випадку менше *числа N* варіантів *варіювання ($N > d$)* і для перевірки гіпотези про адекватність залишиться одна або декілька степіней вільності ($\nu_{1ад} > 0$).

У тому випадку, коли гіпотеза про адекватність відхиляється, необхідно переходити до складнішої форми математичного опису або, якщо це можливо, проводити експеримент з меншим інтервалом варіювання Δx_i. Слід зазначити, що максимальна величина інтервалу варіювання визначається умовою адекватного опису об'єкта в області варіювання. Якщо при великих інтервалах варіювання математична модель неадекватна, то виникають систематичні помилки у визначенні коефіцієнтів, для зменшення яких варто звузити область варіювання. Однак зі зменшенням інтервалу варіювання з'являється цілий ряд нових труднощів: зростає відношення перешкоди до корисного сигналу, що призводить до необхідності збільшувати число паралельних дослідів для виділення корисного сигналу на тлі шуму, тобто зменшуються абсолютні значення оцінок b_i коефіцієнтів, величини котрих безпосередньо залежать від Δx_i (для рівняння з нормованими чинниками z_i), і оцінки коефіцієнтів можуть стати статистично незначимими.

Для вибору інтервалу варіювання проводять попередні експерименти. Інтервал варіювання можна вибирати рівним 0,05 – 0,3 від припустимого діапазону варіювання чинників, тобто область варіювання складає приблизно 10 – 60% від усього діапазону. Початкову точку варіювання (базову точку) вибирають якомога ближче до центру області факторного простору, у якій шукається математичний опис об'єкта (або області обмежень).

6.2 Порядок виконання роботи

1. Знайти визначальні співвідношення півреплік планування типу 2^{4-1} з генерувальними співвідношеннями:

1) $z_4 = z_1 z_2 z_3$;

2) $z_4 = -z_1 z_2 z_3$;

3) $z_4 = z_1 z_2$;

4) $z_4 = -z_1 z_2$;

5) $z_4 = z_1 z_3$;

6) $z_4 = -z_1 z_3$;

7) $z_4 = z_2 z_3$;

8) $z_4 = -z_2 z_3$.

2. Вибрати з цих півреплік одну для реалізації дробного факторного експерименту, якщо апріорі відомо, що на відгук можуть здійснювати

вплив лише три парні взаємодії $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_2 x_4$ і лінійні члени. Вибір здійснювати з умови отримання незмішаних оцінок лінійних коефіцієнтів й коефіцієнтів трьох вказаних парних взаємодій. Побудувати матрицю планування піврепліки вибраної відповідно номера у списку групи.

6.3 Контрольні запитання

1. Що називається дробними факторними експериментами?

2. Як вибираються чинники планування, їхні основні (базові) рівні й інтервали варіювання?

3. Вказати порядок проведення експерименту методом ДФЕ.

4. Як складається матриця планування ДФЕ?

5. Як перевірити відтворюваність варіантів варіювання ДФЕ?

6. За яких умовах не дотримується вимога відтворюваності експерименту і як варто діяти у цьому випадку?

Практична робота №7

ПЛАНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ПОШУКОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Мета роботи - *ознайомлення з основними методами пошукової оптимізації статичних об'єктів і вивчення властивостей цих методів при наявності адитивних випадкових завад, а також в умовах обмежень.*

7.1 Постановка задачі оптимізації

Головною задачею і кінцевою метою вирішення великої кількості різноманітних дослідницьких проблем керування, проектування і планування зазвичай є досягнення і підтримання екстремальних, тобто найкращих, показників. Процес знаходження і підтримки найкращих (в певному сенсі) значень цільової функції об'єкта називається оптимізацією. Критерій оптимізації (цільова функція) у зазвичай задається, іноді дослідник вибирає його сам. Цей критерій повинен задовольняти таким основним вимогам:

1) нести в собі істотну інформацію про об'єкт, про якість процесу;

2) вимірюватися з достатньою точністю;

3) нести узагальнений характер, тобто відображати властивості і якості процесу в цілому - часто це інтегральний показник якості. Якщо математичне очікування критерію оптимізації y є функція від вектора вхідних керованих змінних (чинників), тобто

$$M\{y\}=f(\vec{x})=f(x_1, x_2,...,x_n), \quad (7.1)$$

де n - число чинників,

то задача оптимізації зводиться до відшукання таких значень чинників

$\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, (7.2)

при яких цільова функція досягає екстремуму (максимуму або мінімуму). Будемо виходити з завдання знаходження максимуму. Якщо на об'єкт впливають адитивні завади (рис. 7.1), то залежність (7.1) виражає не функціональну, а регресійну залежність, яка в $(n + 1)$-мірному просторі n чинників x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ і цільової функції y утворює поверхню відгуку.

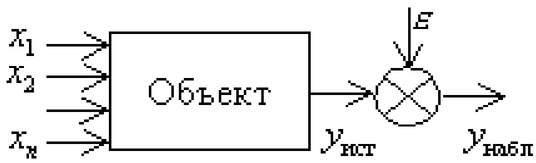


Рис. **7.**1 Вхід і вихід об’єкту

Для вирішення завдання оптимізації, тобто для відшукування вектора (7.2), можна застосувати два принципово різних підходи:

1) якщо відома або є можливість знайти n-факторну математичну модель для тієї частини факторного простору, де розташований екстремум функції відгуку, то завдання оптимізації вирішують аналітичним або чисельним методом;

2) якщо математичний опис не отримано з яких-небудь причин, то здійснюють експериментальний пошук області оптимуму.

У першому випадку використовують відоме з математичного аналізу властивість функцій, що мають екстремум: в точці екстремуму (максимуму або мінімуму) перша похідна цієї функції обертається в нуль. Якщо необхідно знайти повну похідну в n-факторному просторі, то знаходять n часткових похідних за кожним з n чинників і отримують систему з n рівнянь:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial y}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{n-1}} = 0; \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right) \quad (7.3)$$

Рішенням системи (7.3) і є вектор (7.2). Однак у багатьох практичних випадках аналітична залежність (7.1) невідома або її знаходження є складним завданням. Тоді, якщо є можливість одночасно спостерігати всі n чинників і цільову функцію, завдання оптимізації простіше вирішити за допомогою іншого підходу, тобто за допомогою експериментального пошуку. Для цього спочатку здійснюють вивчення характеру поверхні відгуку в районі спочатку обраної точки факторного простору (за допомогою спеціально спланованих «пробних» випробувань). Потім здійснюють «робочий» рух в бік екстремуму, причому напрямок руху визначають за результатами пробних випробувань. Такий рух може здійснюватися шляхом ряду етапів, які можуть об'єднуватися в «цикли» (послідовна процедура).

Після виходу в район екстремуму оптимальну точку можна уточнити одним з двох способів:

1) постановкою додаткових, особливим чином спланованих випробувань;

2) отриманням математичної моделі другого або більш високого порядку і подальшим рішенням системи рівнянь (7.3).

У даній роботі розглянуті кілька основних методів пошукової оптимізації, вони розрізняються способами постановки пробних випробувань і визначення напрямку руху до екстремуму, а також способами організації самого робочого руху до екстремуму.

Завдання надійного відшукування екстремуму ускладнюється, якщо на об'єкт впливають випадкові завади ε (рис. 7.1). Тут кожне j-е виміряне (спостережуване) значення цільової функції $y_{jнабл}$ виявляється сумою дійсного її значення $y_{jіст}$ і випадкової завади ε_j:

$y_{jнабл} = y_{jіст} + \varepsilon_j$. (7.4)

Для підвищення надійності результатів застосовують спеціальні методи, наприклад в кожній запланованій точці факторного простору виконують по декілька паралельних випробувань. Крім того, слід враховувати, що різні пошукові методи в рівних умовах володіють різною завадостійкістю (Під завадостійкістю методу будемо розуміти його здатність правильно оцінювати напрямок робочого руху, а також здатність швидко і точно наводити робочу точку в область екстремуму, незважаючи на наявність завад ε).

Якщо характеристики об'єкта змінюються, зміщуються в часі (дрейф), то це створює додаткові труднощі і доводиться створювати спеціальні плани експерименту.

В умовах обмежень рішення задачі пошуку оптимуму має ряд особливостей, які розглянуті в кінці роботи.

7.2 Метод Гаусса-Зайделя

Метод Гаусса-Зайделя передбачає почергове знаходження локальних екстремумів цільової функції по кожному чиннику x_i (i = 1, 2,..., n). При цьому на кожному i-му етапі стабілізують n-1 чинників і варіюють тільки один, i-й чинник. Графічна інтерпретація методу дана на рис. 7.2, де на площині двох чинників x_1, x_2 зображена функція відгуку у топографічним способом за допомогою замкнутих ліній постійного рівня цієї вихідної функції, шо оптимізується. Ці лінії на рис. 7.2 відповідають деяким відносним величинам, однак, як зазначалося вище, форма функції відгуку до початку дослідження зазвичай невідома. Шлях руху позначений точками *M*. Завдання пошуку максимуму методом Гаусса-Зайделя вирішують в кілька етапів, об'єднаних в цикли. Розглянемо процедуру методу з ілюстрацією двухчинникового прикладу.

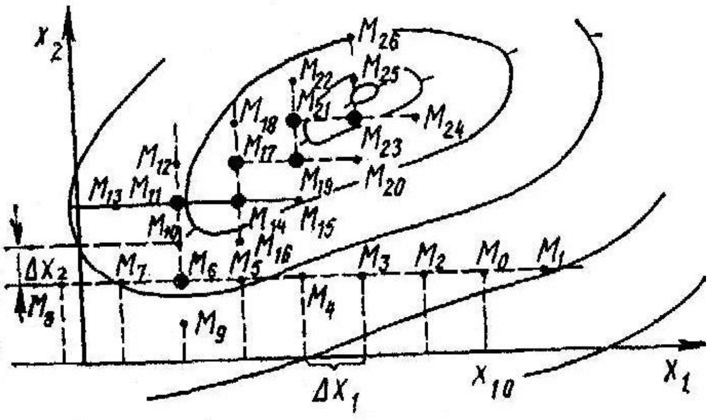


Рис. 7.2 Метод Гаусса-Зайделя

I етап.

1. Вибирають основну (початкову, базову) точку (на рис. 7.2 це точка M_0), зазвичай вона відповідає номінальному режиму процесу $\vec{x}_0 = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{n0})$. Іноді цю точку вибирають в центрі області, яку бажано досліджувати, або в центрі області обмежень (При такому виборі базової точки всі напрямки виявляються рівноправними, а це важливо в разі, коли свідомо нічого невідомо про те, де, хоча б приблизно, розташований екстремум.), якщо він є.

2. Вибирають інтервал (ступінь) варіювання Δx_1 (рис. 7.2) за чинником x_1. Очевидно, що ступінь варіювання не повинна бути дуже малою, інакше рух до екстремуму виявиться уповільненим. Крім того, на інтервалі варію-

вання Δx_i ($i = 1, 2, ..., n$) зміна цільової функції Δy має бути істотно більшою, ніж похибка її вимірювання δy (не менш ніж в 5-10 разів).

3. Визначають координати пробних точок M_1 і M_2:

$$\vec{x}(M_1) = (x_{10} + \Delta x_1; x_{20}; ...; x_{n0}),$$
$$\vec{x}(M_2) = (x_{10} - \Delta x_1; x_{20}; ...; x_{n0}). \quad (7.5)$$

4. У точках M_1 і M_2 ставлять пробні випробування (для підвищення точності результатів можуть виконуватися паралельні випробування), вимірюють відгуки $y(M_1)$ і $y(M_2)$.

5. Порівнюють отримані відгуки, і якщо

$$y(M_1) > y(M_2) \quad (7.6)$$

(Як на рис. 7.2), то здійснюють робочий рух на один робочий крок Δx_1 за напрямком $\overrightarrow{M_0 M_2}$ в точку M_3.

6. Аналогічні кроки продовжують в тому ж напрямку до тих пір, поки на якомусь k-му кроці не виявиться, що

$$y(M_k) < y(M_{k-1}), \quad (7.7)$$

тобто значення відгуку в черговій, k-й робочій точці стане зменшуватися, - це і є ознакою досягнення локального екстремуму. За локальний екстремум приймають (k-1)-у точку з відгуком $y(M_{k-1})$. На рис. 7.2 це точка M_6.

II етап. Його проводять в тому ж порядку, що і I етап, з тією лише різницею, що стабілізують всі чинники, крім x_2. За нову базову точку приймають точку з координатами (Якщо початок руху з точки M_0 відразу збіглося зі зростанням y, то в рівність (7.8) замість k-2 беруть k-1.)

$$\vec{x}(M_{k-1}) = (x_{10} \pm \Delta x_1(k-1); x_{20}; \dots; x_{n0}), \quad (7.8)$$

а x_2 варіюють на обрану по аналогічним умовам величину інтервалу варіювання Δx_2. Після досягнення локального екстремуму по чиннику x_2 точку нового екстремуму приймають за нову базову точку. На рис. 7.2 це точка M_{11}.

Перший цикл просування до екстремуму закінчується n-м етапом, на якому стабілізують всі чинники, крім x_n. Для нього вибирають ступінь варіювання Δx_n і здійснюють пробний, а потім робочий рух до досягнення локального екстремуму по чиннику x_n. Якщо екстремум не досягнуто, то виконують другий цикл пошуку.

Другий цикл, як і перший, починається з I етапу, на якому варіюють чинник x_1 при стабілізації інших x_i ($i \neq 1$), потім послідовно виконують n етапів по кожному з n чинників.

Пошуковий кроковий рух до екстремуму закінчують по досягненню такої точки факторного простору, при русі з якої в будь-який бік за всіма n факторним осях x_i в позитивному або негативному напрямках значення відгуку виявляються менше. Таку точку приймають за екстремум (максимум).

Переваги методу Гаусса-Зайделя:

1) очевидна простота стратегії і наочність;

2) висока завадозахищеність в сенсі вибору напрямку руху.

Недоліки:

1) шлях до головного екстремуму виявляється зазвичай довгим, особливо при великому числі n чинників;

2) в умовах великого промислового виробництва виявляється важким стабілізувати n-1 чинник на тривалий час;

3) якщо поверхня відгуку має складну форму (вузькі гребені, яри тощо), то використання методу може призвести до помилкового відповіді на питання про місце розташування екстремуму;

4) метод не дає інформації про взаємодії чинників

Історично метод Гаусса-Зайделя відомий як перший з розглянутих. В даний час він іноді застосовується при машинному експерименті.

7.3 Градієнтні методи

Градієнтні методи мають кілька різновидів, розрізняються правилами вибору ступенів варіювання і робочих кроків на кожному етапі руху до екстремуму. Суть стратегії всіх цих різновидів полягає в тому, що на кожному етапі навколо чергової базової точки організовують пробні експерименти, за результатами яких оцінюють новий напрямок градієнта, після чого в цьому напрямку здійснюють один робочий крок. Нагадаємо, що вектор-градієнт в *n*-факторному просторі визначається співвідношенням

$$\text{grad } y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\vec{x}_1^0 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\vec{x}_2^0 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\vec{x}_n^0, \quad (7.9)$$

де $\vec{x}_i^0$ (i = 1, 2, n) - поодинокі напрямні вектори (орти), розташовані уздовж факторних осей; $\partial y/\partial x_i$ - часткова похідна цільової функції по i-му чиннику. Пробні випробування (по два в точках, розташованих на прямих, паралельних кожній факторній осі і проходять через базову точку) проводять з метою отримати наближені оцінки часткових похідних. Розглянемо два різновиди градієнтних методів.

Метод градієнта (звичайний) здійснюється за такою процедурою.

1. Вибирають початкову (базову) точку $\vec{x}_0 = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{n0})$ по правилами, викладеними в п. 2. На рис. 7.3 це точка L_0.

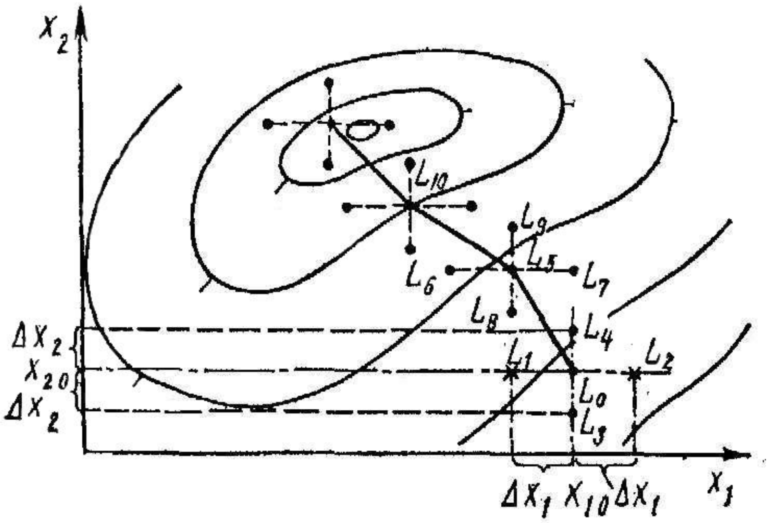


Рис. 7.3 Градієнтні методи

2. Вибирають інтервал варіювання Δx_i по кожному з чинників x_i (i=1, 2,…, n) користуючись уже відомими правилами.

3. Визначають координати пробних точок (рис. 7.3). Наприклад, вздовж напрямку, паралельного факторній осі x_1, ними є точки L_1, L_2 з координатами

$$\vec{x}(L_1) = (x_{10} - \Delta x_1; x_{20}; \dots; x_{n0}),$$
$$\vec{x}(L_2) = (x_{10} + \Delta x_1; x_{20}; \dots; x_{n0}), \qquad (7.10)$$

тобто варіюють один чинник x_1 при стабілізації інших чинників на базовому рівні. Аналогічно обчислюють координати пробних точок вздовж напрямків, паралельних іншим факторним осям x_2, x_3, ..., x_n. У пробних точках ставлять випробування і отримують значення цільової функції y.

4. За результатами пробних випробувань обчислюють оцінки складові градієнта вектора в точці L_0 для кожного i-го чинника:

$$\mathrm{grad}\,y(L_0)\big|_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}\ \frac{\Delta y\,|_{x_i}}{2\Delta x_i} = a_i\ . \ (7.11)$$

Зокрема, для чинника x_1 за результатами випробувань в точках L_1 і L_2 обчислення виконують за формулою

$$\mathrm{grad}\,y(L_0)\big|_{x_1} \approx \frac{\Delta y\big|_{x_1}}{2\Delta x_1} = \frac{y(L_2) - y(L_1)}{x_1(L_2) - x_1(L_1)} = \widehat{a}_i\ . \ (7.12)$$

Як відомо, часткові похідні є коефіцієнтами a_i (i = 1, 2,…, n; i 0) рівняння площини, дотичної до поверхні відгуку в точці L_0:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.\ (7.13)$$

Оцінки коефіцієнтів a_i отримують за формулою (7.11).

5. Знаходять координати робочої точки на напрямку градієнта. Для цього вибирають параметр робочого кроку $\rho_{гр}$ і обчислюють координати першого робочого точки по всіх факторних осях x_i (i = 1, 2,..., n):

$$x_{i1} = x_{i0} + \rho_{гр} a_{i0}.\ (7.14)$$

На рис. 7.3 першої робочої точкою є точка L_5. Щоб з основної точки L_0 потрапити в точку L_5 від L_0 відкладають в масштабі відрізки, рівні $\rho_{гр} a_1$ і $\rho_{гр} a_2$, причому якщо $a_i < 0$, то за відповідним чиннику відрізок відкладають в негативному напрямку від точки L_0, тобто для чинника x_1 - вліво від точки L_0, а для чинника x_2 - вниз від точки L_0. Якщо $a_i > 0$, то відрізки $\rho_{гр} a_i$ відкладають в позитивному напрямку від основної точки.

6. Першу робочу точку приймають за нову базову точку і навколо неї організують нові пробні випробування для оцінювання нового напрямку градієнта, після чого організовують новий робочий крок (на рис. 7.3 - в точку L_{10}). У загальному випадку в кожній k-й робочій точці за результатами пробних випробувань навколо неї отримують оцінки складових градієнта a_{ik} і здійснюють (k + 1)-й робочий крок (k = 0, 1, 2 ...) в точку з координатами

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + \rho_{гр} a_{ik}. \quad (7.15)$$

Робочий рух здійснюють до тих пір, поки на черговому кроці всі складові градієнта не стануть знехтувано малими, тобто усі (i = 1, 2, ..., n). Для цього достатньо, щоб виконувалася нерівність

$$\rho_{гр} a_{i,k+1} < 1. \quad (7.16)$$

Якщо за результатами пробних випробувань в (k + 1)-й робочій точці виконується умова (7.16), то рух до екстремуму припиняють і цю робочу точку приймають за точку екстремуму.

Переваги методу градієнта:

1) достатня простота стратегії;

2) підвищена в порівнянні з методом Гаусса-Зайделя швидкість руху до екстремуму (ефективність).

Недоліки:

1) велика чутливість до завад щодо вибору напрямку робочого руху;

2) у випадках, коли поверхня відгуку має складну форму, метод градієнта може не привести до дійсного екстремуму;

3) якщо поверхня відгуку досить полога, то в умовах завад метод мало ефективний в сенсі точності виходу до екстремуму;

4) як і метод Гаусса-Зайделя, метод градієнта не дає інформації про взаємодійні чинники (взаємодії характеризують ступінь кривизни поверхні відгуку).

Метод Кіфера-Вольфовица відрізняється від описаного вище звичайного методу градієнта тим, що якщо в першому з них розміри інтервалів варіювання Δx_i при постановці пробних випробувань і параметр $\rho_{\text{гр}}$ робочого кроку залишаються незмінними на будь-якому робочому кроці, то в розглянутому методі Δx_{ik} і $\rho_{\text{грk}}$ вибирають в залежності від номера k робочого кроку:

$$\Delta \mathrm{x}_{\mathrm{ik}} = \frac{\Delta \mathrm{x}_{\mathrm{i0}}}{k^{\gamma}}, \rho_{\text{грk}} = \frac{\rho_{\text{гр0}}}{k}, (7.17)$$

де Δx_{i0} - початковий інтервал варіювання в основний точці L_0;
$\rho_{\text{гр0}}$ - початкове значення параметра робочого кроку;
k - номер робочого кроку (k = 1, 2, ...);
γ - постійна ступінь, зазвичай обирається в межах $0 < \gamma < 0,5$. Найчастіше приймають $\gamma = 0,25$.

Якщо в методі градієнта фактичний розмір k-го робочого кроку зменшується тільки через зменшення градієнта, тобто крутизни нахилу поверхні відгуку, при наближенні до області екстремуму, то в методі Кіфера-Вольфовица фактичний розмір робочого кроку зменшується, як ми бачили, в прямій залежності від номера цього кроку.

Перевагою методу Кіфера-Вольфовица в порівнянні з немодифікованим методом є його підвищена точність відшукання екстремальної точки, якщо поверхня відгуку досить крута, а екстремум знаходиться від базової точки не дуже далеко. Недоліком цього методу є його низька ефективність в умовах пологих поверхонь відгуку. При дуже пологих поверхнях відгуку метод Кіфера-Вольфовица взагалі не призводить до мети: робочі кроки стають порівнянними з похибками вимірювання до досягнення екстремуму. Інші переваги і недоліки, а також вся процедура роботи такі ж, як і в методі градієнта.

7.4 Метод крутого сходження (метод Бокса-Уїлсона)

Метод крутого сходження запропонований Дж. Боксом і К. Уілсоном як синтез кращих рис градієнтних методів і методу Гаусса-Зайделя, причому пробні випробування для з'ясування напрямку руху також виконують по-особливому - методом повного факторного експерименту (або часткового факторного експерименту). Від градієнтних методів тут прийнято виконання робочого руху вздовж вектор-градієнта, визначеного в районі вихідної (базової) точки, а від методу Гаусса-Зайделя узятий принцип просування не на один робочий крок (як в методі градієнта), а до досягнення локального екстремуму функції відгуку на напрямку градієнта, без його коригування на кожному робочому кроці. Проведення пробних випробувань методом повного факторного експерименту (або дробного факторного експерименту) дозволяє більш точно оцінювати напрямок градієнта, ніж при традиційному методі градієнта. Дійсно, з порівняння рис. 7.4 і рис. 7.3 і виходячи з розрахункової формули (7.11) для оцінок a_i коефіцієнтів в методі градієнта і в методі крутого сходження можна зробити висновок, що при числі чинників $n = 2$ кількість точок для пробних випробувань в обох методах дорівнює 4, тобто однакова. Але якщо кожну оцінку в методі градієнта отримують за результатами випробувань лише в двох пробних точках (при будь-якому числі n чинників), то в методі крутого сходження - за результатами випробувань у всіх чотирьох пробних точках (в загальному випадку - у всіх 2^n або 2^{n-p} пробних точках). Проведення пробних випробувань методом повного факторного експерименту (або дробного експерименту) дозволяє також отримувати інформацію про взаємодії чинників і досить просто здійснювати статистичну перевірку результатів розрахунків.

На першому циклі методу крутого сходження використовується така процедура:

1. Вибирають основну (початкову, нульову) точку K_0 (рис. 7.4). Правила її вибору ті ж самі.

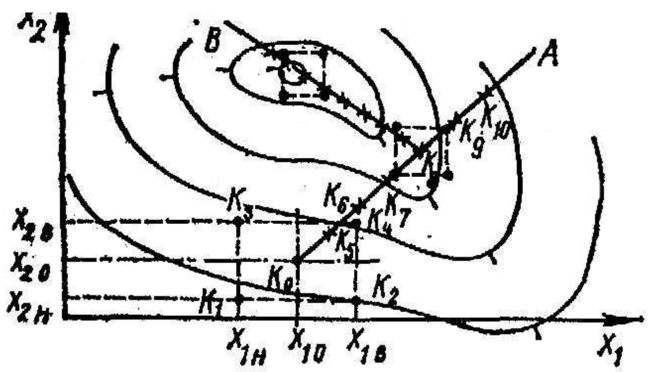


Рис. 7.4 Метод крутого сходження

2. Вибирають інтервал варіювання Δx_i для кожного чинника x_i (i = 1, 2, ..., n). Правила вибору Δx_i викладені вище.

3. Визначають координати пробних точок для нижнього і верхнього рівнів варіювання чинників x_i за правилами повного факторного експерименту

$$x_{iн}=x_{i0}-\Delta x_i,$$
$$x_{iв}=x_{i0}+\Delta x_i, \qquad (7.18)$$

і становлять ортогональну матрицю планування повного факторного експерименту або дрібного факторного експерименту, для чого чинники нормують за формулою

$$z_i=(x_i-x_{i0})\Delta x_i. \qquad (7.19)$$

Потім вибирають число m серій паралельних випробувань, порядок проведення випробувань в серіях рандомізують за допомогою таблиці випадкових чисел (див. Додаток І) і в цьому порядку виконують спостереження відгуку в точках повного факторного експеримент і дрібного факторного експерименту (на рис. 7.4 це K_1, K_2, K_3, K_4).

4. За результатами повного факторного експерименту (або дрібного факторного експерименту) обчислюють оцінки коефіцієнтів нормованого рівняння регресії першого порядку (Для оцінювання ступеня кривизни поверхні відгуку можуть обчислюватися також коефіцієнти при взаємодіях z_iz_l. Надалі будемо говорити про повний факторний експеримент, маючи на увазі що можливий і дробний факторний експеримент)

$$y=a_0+a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_nz_n, \qquad (7.20)$$

а також статистичну перевірку значущості a_i, для чого можна розрахувати критичне значення коефіцієнтів:

$$v_{зн}=N(m-1), \qquad (7.21)$$

де $t_{кр}$=$t_{табл}\{v_{зн}; q\}$ - обирається з таблиці (див. Додаток V) при числі ступенів вільності $v_{зн}$=$N(m-1)$ і прийнятому рівні значущості q.

5. Обчислюють розрахункові i-ті складові робочих кроків в реальному масштабі:

λ_i=$a_i \Delta x_i$. (7.22)

Максимальне по модулю з усіх λ_i (1=1, 2..., *n*) приймають за базове $\lambda_{баз}$.

6. Отримують практичні (округлені) і-е складові робочих кроків $\lambda^0_{iокр}$ для просування вздовж напрямку градієнта (на рис. 7.4 це промінь K_0A), для чого округлюють (або змінюють) $\lambda_{баз}$ до зручного $\lambda_{баз.окр}$ і пропорційно до цього округлюють (або змінюють) інші λ_i до $\lambda_{iокр}(i = 1, 2, ..., n)$. Округлення λ_i здійснюють за формулою

$$\lambda_{iокр} = (\lambda_{баз.окр}/\lambda_{баз})\lambda_i, \qquad (7.23)$$

до зручного значення або з урахуванням похибок вимірювання по кожному чиннику x_i. Знаки $\lambda_{iокр}$ повинні відповідати (Якщо відшукується мінімум, то знаки $\lambda_{iокр}$ повинні бути протилежні знакам a_i) знакам оцінок a_i коефіцієнтів.

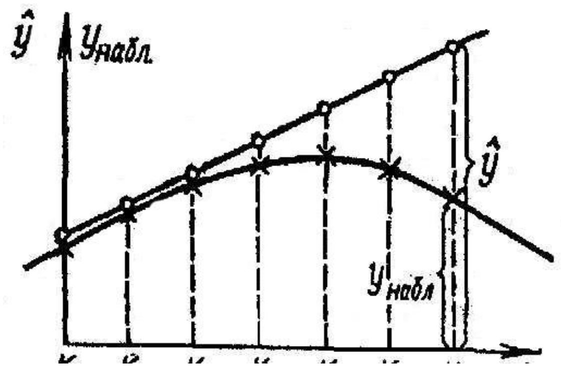
7. Обчислюють координати k-х робочих точок (k = 1, 2 ...) на напрямку градієнта (на рис. 7.4 це точки $K_5 – K_{10}$) в реальному масштабі:

x_{ik}=x_{i0}+$k\lambda_{iокр}$; (7.24) в них послідовно виконують уявні і перевірочні (реальні) випробування. Розмір λ_i зазвичай вибирають так, щоб перша робоча точка (k = 1) не виходила за межі області повного факторного експеримент.

Уявні експерименти полягають в отриманні передбачених (розрахункових) значень відгуку y за отриманим лінійному рівнянню (7.20). Вони дозволяють:

1) скорочувати обсяг реальних випробувань, тобто збільшувати швидкість просування до екстремуму;

2) мати уявлення, наскільки добре рівняння (7.20) апроксимує реальну поверхню відгуку (рис. 7.5), тобто наскільки розрахункові значення y_k відрізняються від результатів спостережуваних значень $y_{k\text{набл}}$ в реальних дослідах;



K_0 K_5 K_6 K_7 K_8 K_9 K_{10} A

Рис. 7.5 Поверхня відгуку

3) оцінювати правильність вибору розміру складових практичного робочого кроку ($\lambda_{i\text{окр}}$): якщо за число кроків k = 3 досягається і перевищується максимально можливе розрахункове значення цільової функції (визначається з фізичних властивостей і обмежень, які існують для об'єкта), то $\lambda_{i\text{окр}}$ потрібно зменшити; якщо ж числі k занадто велике, то $\lambda_{i\text{окр}}$ слід збільшити або рідше ставити реальні випробування.

Реальні (перевірочні) випробування на початку руху з базової точки вздовж напрямку градієнта ставлять через 2 - 4 уявних випробувань, а при зменшенні приростів спостережувані значення відгуку $y_{набл}$, в кожному наступному реалізованому досліді в порівнянні з попереднім в робочих точках перевірочні випробування ставлять частіше, поблизу ж локального екстремуму виконують на кожному кроці. Робочий рух продовжують, поки не буде досягнутий локальний екстремум на напрямку градієнта (на рис. 7.4 це точка K_8). Ознакою досягнення локального екстремуму є зменшення відгуку в наступних перевірочних дослідах.

8. Точку локального екстремуму на первинному напрямку градієнта (на рис. 7.4 це точка K_8 на промені K_0A) приймають за нову нульову точку і організовують другий цикл крутого сходження. Порядок роботи на другому циклі той же, що і на першому. Різниця полягає в тому, що інтервали варіювання при постановці пробних випробувань (повного факторного експерименту) і розмір робочих кроків в зв'язку з наближенням до екстремуму і збільшенням кривизни поверхні відгуку зазвичай вибирають меншими, ніж на першому циклі. У разі необхідності виконують третій цикл крутого сходження.

9. Пошукове робітничий рух припиняють після досягнення області екстремуму. Ознакою досягнення екстремуму є статистична незначимість оцінок a_i коефіцієнтів при членах першого порядку, обчислених за результатами повного факторного експеримент (дробного факторного експерименту) навколо чергової нульової точки.

Переваги методу крутого сходження:

1) висока завадозахищеність (стійкість) в сенсі точності оцінювання складових градієнта: якщо в градієнтних методах кожна складова a_i оцінюється лише по двох точках факторного простору, то в повному факторному

експерименті, який в методі крутого сходження використовується для цієї мети, кожен коефіцієнт a_i оцінюється за всіма $N = 2^n$ точок;

2) висока ефективність в сенсі швидкості руху до екстремуму; в порівнянні з методом Гаусса-Зайделя вона вище за рахунок просування по градієнту, а в порівнянні з градієнтними - за рахунок виключення пробних випробувань на кожному робочому кроці і за рахунок уявних випробувань;

3) пробні випробування, що виконуються методом повного факторного експерименту, дозволяють отримувати інформацію про оцінки a_{il} коефіцієнтів при взаємодіях чинників z_i*z_l, що характеризують кривизну поверхні відгуку: збільшення a_{il} при зменшенні a_i зазвичай характеризує наближення до екстремуму;

4) повний факторний експеримент із застосуванням паралельних випробувань дозволяє досить просто здійснювати надійну статистичну інтерпретацію результатів;

5) метод найбільш ефективний з усіх відомих при пологих поверхнях відгуку.

Недоліком розглянутого методу є дещо більша, ніж в попередніх методах, складність планування пробних випробувань, що вимагає одночасного варіювання відразу всіх чинників щодо базової точки, і менша оперативність в порівнянні з симплексним методом (див. нижче) в умовах дрейфувальних об'єктів.

7.5 Симплексних метод

Симплексом називають випуклу форму (або тіло), утворену $n + 1$ вершинами в просторі n чинників, причому ці $n + 1$ вершин не належать одночасно жодному з підпросторів з n-1 чинників. У просторі одного чинника ($n = 1$) симплексом слугує відрізок встановленого розміру, при $n = 2$ - трикутник, при n = 3 - тетраедр. При $n > 4$ звичним чином інтерпретувати симплекс неможливо.

Симплексний метод дозволяє поєднувати пробні випробування для визначення напрямку руху з робочим рухом по поверхні відгуку до області оптимуму. Основна ідея симплексного методу полягає в такому. Якщо у всіх $n + 1$ вершинах симплекса поставити випробування і заміряти відгук, то (при не дуже великому рівні шумів) за величиною відгуку в вершинах можна судити в якому напрямку слід рухатися, щоб наблизитися до екстремуму. Розглянемо це на прикладі двофакторного простору (рис. 7.6). Припустимо, що на основі деяких міркувань (про них йдеться нижче) побудований початковий симплекс I з вершинами C_1, C_2, C_3 і в них виміряно відгук y. Якщо рівень шуму не дуже великий, то, очевидно, відгук в точці C_1 є найменшим порівняно з відгуками в вершинах C_2 і C_3. Тоді можна вважати, що максимум лежить приблизно в напрямку променя, проведеного з вершини C_1 через центр A симплекса. Відповідно до цих припущень при застосуванні симплексного методу просування до екстремуму відбувається шляхом дзеркального відображення вершини з мінімальним значенням відгуку через протилежну сторону (або грань) симплекса.

Таким чином, новий симплекс II утворюється шляхом постановки випробування всього лише в одній новій точці C_4 (рис. 7.6). Після отримання спостережуваного значення відгуку в точці C_4 знову порівнюють величини відгуків в вершинах симплекса II, вибирають нову вершину з мінімальним відгуком і знову відображають її щодо протилежного боку, утворюють симплекс III тощо, поки симплекс зробить повний оборот щодо однієї з вершин . Шлях руху до максимуму показаний на рис. 7.6.

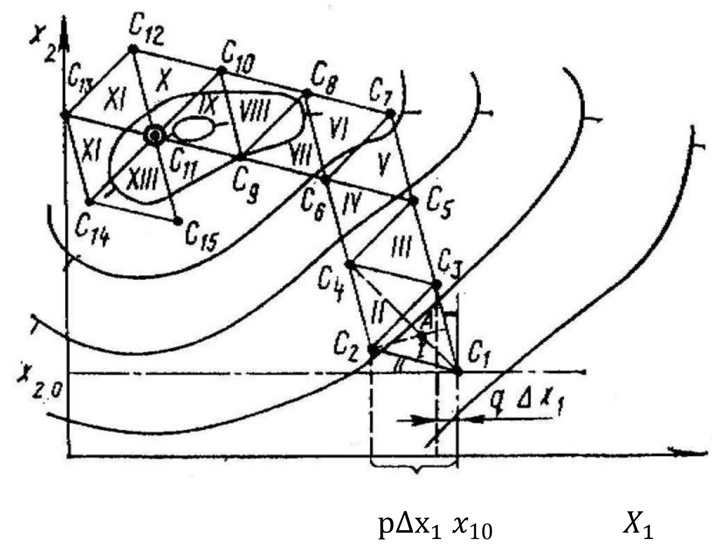


Рис. 7.6 Симплексний метод

Порядок роботи при використанні симплексного методу полягає в такому:

1. За вже відомим правилами вибирають вихідну точку C_1, а також інтервали варіювання Δx_i для всіх чинників (i = 1, 2..., n).

2. Вибирають безрозмірну величину $\rho_{сим}$ сторони (або ребра) симплекса в відносних одиницях щодо інтервалів варіювання Δx_i; найпростіше вибрати $\rho_{сим}$ = 1. Прагнуть, щоб в безрозмірних одиницях боку симплекса були рівні (регулярний симплекс).

3. Обчислюють координати решти вершин початкового симплекса. Зазвичай для цього використовують таке правило. Через початкову точку C_1 проводять осьові лінії, паралельні координатним осях, і вибирають квадрант, в якому, за припущеннями, повинен розташовуватися екстремум цільової функції. У початкову точку поміщають вершину симплекса C_1, а сам симплекс I розташовують так, щоб його боки утворили з осьовими лініями рівні кути, відмічені на рис. 7.6 подвійними дужками. При такому розташуванні початкового симплекса координати його вершин визначають за

допомогою матриці (табл. 7.1), в якій дано координати вершин (n + 1) -мірного симплекса в n -факторному просторі.

Безрозмірні відносні величини p і q при такому розташуванні симплекса визначають за формулами

$$\mathrm{p}=\frac{1}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{n}+1}+\mathrm{n}-1\right),\ \mathrm{q}=\frac{1}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{n}+1}-1\right). \qquad (7.25)$$

На рис. 7.6 показані розміри $p\Delta x_1$ і $q\Delta x_1$ для випадку $\rho_{\text{сим}} = 1$. Якщо приймають $\rho_{\text{сим}} \neq 1$, то множать ще на $\rho_{\text{сим}}$. Знаки Δx_i залежать від номера квадранта, в якому розташований початковий симплекс. Для n = 2 маємо p = 0,966, q = 0,259.

4. У вершинах симплекса виконують спостереження відгуку і порівнюють за величиною; вибирають вершину з мінімальним відгуком і відображають її щодо протилежного боку або межі; знаходять вершину наступного симплекса II, n вершин якого одночасно є і вершинами попереднього симплекса I. Координати відображеної вершини обчислюють за формулою

$$x_{\mathrm{il,k+1}} = \frac{2}{n}\left(x_{i1k}+\mathrm{x_{i2k}} + \ldots + \mathrm{x_{i,n+1,k}}\right) \pm x_{\mathrm{ilk}}, \ (7.26)$$

де i – номер чинника (i = 1, 2, ..., n);

l - номер вершини k-го симплекса, де виявлений мінімальний відгук;

k + 1 - номер подальшого симплекса, який містить відображену вершину (їй умовно привласнюють той же номер l);

n - число чинників.

Таблиця 7.1

Чинники x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n
Вершина C_1	x_{10}	x_{20}	x_{30}	…	x_{i0}	…	x_{n0}
Вершина C_2	$x_{10}+p\Delta x_1$	$x_{20}+q\Delta x_2$	$x_{30}+q\Delta x_3$	…	$x_{i0}+q\Delta x_i$	…	$x_{n0}+q\Delta x_n$
Вершина C_3	$x_{10}+q\Delta x_1$	$x_{20}+p\Delta x_2$	$x_{30}+q\Delta x_3$	…	$x_{i0}+q\Delta x_i$	…	$x_{n0}+q\Delta x_n$
.	.	.	.	…	.	…	.
.	.	.	.	…	.	…	.
.	.	.	.	…	.	…	.
Вершина C_{i+1}	$x_{10}+q\Delta x_1$	$x_{20}+q\Delta x_2$	$x_{30}+q\Delta x_3$	…	$x_{i0}+p\Delta x_i$	…	$x_{n0}+q\Delta x_n$
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
Вершина C_{n+1}	$x_{10}+q\Delta x_1$	$x_{20}+q\Delta x_2$	$x_{30}+q\Delta x_3$	…	$x_{i0}+q\Delta x_i$	…	$x_{n0}+p\Delta x_n$

Якщо мінімальний відгук виявився відразу в двох вершинах, то питання, яку з них відображати, вирішують довільно, наприклад за допомогою підкидання монети.

5. Ставлять експеримент в відбитої вершині нового симплекса і відгук у ній порівнюють з відгуками в решті n вершин, а потім знову вибирають вершину з мінімальним відгуком і відображають її через протилежну сторону (або грань) симплекса. Якщо в новій вершині (k +1)-го симплекса відгук виявився знову мінімальним, то повертаються до k-му симплексу і ві-

дображають другу по мінімальності вершину. Якщо це явище повторюється, то відображають третю по мінімальності вершину тощо.

6. Експеримент продовжують до тих пір, поки симплекс зробить повний оборот навколо однієї з вершин. На рис. 7.6 це вершина C_{11}. Очевидно, що точність знаходження точки екстремуму залежить від двох причин: розміру симплекса і впливу завад. Для уточнення положення екстремальної точки статичного об'єкта в останніх симплексах рекомендується ставити паралельні випробування, щоб знизити вплив завад, а також виконати випробування в середині того симплекса, в вершинах якого відгук виявився максимальним порівняно з іншими симплексами.

Переваги симплексного методу:

1) досить висока стійкість в сенсі вибору напрямку руху до екстремуму;

2) вивчення поверхні відгуку поєднується з одночасним робочим рухом до екстремуму;

3) при оптимально обраному розмірі симплекса забезпечується висока швидкість виходу до області екстремуму;

4) висока оперативність, що дозволяє рекомендувати симплексний метод особливо для безперервної оптимізації об'єктів з дрейфуючими екстремумами.

Недоліки:

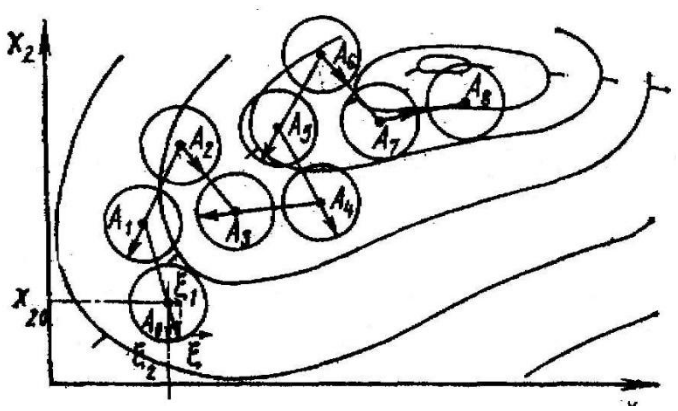
1) відносно висока складність обчислення координат вершин симплекса;

2) метод не дозволяє безпосередньо отримувати математичний опис досліджуваного ділянки поверхні відгуку, як, наприклад, в методі Бокса-Уїлсона;

3) в умовах пологих поверхонь відгуку симплексний метод дає менш точний розв'язок, ніж метод крутого сходження.

7.6 Метод випадкового пошуку

Основна ідея методу випадкового пошуку полягає в тому, що точку кожного пробного випробування для вивчення поверхні відгуку в районі базової (початкової) точки вибирають випадковим чином (звідси і назва методу). Незважаючи на довільність вибору пробної точки, алгоритм випадкового пошуку дозволяє послідовно наближатися до екстремальної області. Випробування проводять у вихідній (початкової) точці і в випадково обраній пробній точці, вимірювання відгуку в них порівнюють і, якщо шукається максимум, здійснюють робочий крок в напрямку зростання цільової функції. Нову робочу точку приймають за нову початкову і знову вибирають пробну точку випадковим чином. Зазвичай довжина робочого кроку перевищує інтервал варіювання між нульовою і пробної точкою. Ілюстрація методу дана на рис. 7.7.



x_{10} X_1

Рис. 7.7 Метод випадкового пошуку

Порядок роботи при використанні методу випадкового пошуку полягає в такому:

1. Вибирають початкову точку і розмір випадкового вектора $\vec{\xi}$ такого, що $|\xi|=\rho_{\text{сл.п}}$. Так як $\rho_{\text{сл.п}}$ повинен бути безрозмірною величиною, то спочатку переходять до нормованому факторному простору, причому за нормовані одиниці варіювання приймають деякі умовні інтервали варіювання Δx_i за кожним чинником x_i (i = 1, 2 ..., n). За такі умовні інтервали варіювання можуть бути прийняті, наприклад, абсолютні похибки вимірювання δ_i по кожному і-му чиннику або більші відрізки.

2. Визначають усі n складових випадкового вектора $\vec{\xi}$, початком якого слугує нульова точка (на рис. 7.7 точка A_0), а кінець вектора $\vec{\xi}$ рівноймовірно розподілений по колу (або сфері) з радіусом $\rho_{\text{сл.п}}$ і центром в нульовій точці. Для цього використовують таблицю рівномірно розподілених випадкових чисел (див. Додаток І). Нехай, наприклад, прийнято $\rho_{\text{сл.п}}$ = 15. У таблиці випадкових чисел випадковим чином вибирають початок відліку і знаходять перше-ліпше число з інтервалу (0,15), скажімо 5 (воно знаходиться в 6-му стовпці і 9-му рядку). Це і є першою складовою вектора $\vec{\xi}$, тобто ξ_1. Знак ξ_1 перед встановлюють також за допомогою таблиці випадкових чисел. Якщо перед числом 5 в стовпці стоїть число парне (в даному випадку це 02), то перед ξ_1 ставлять плюс, тобто ξ_1 = +5. Якби перед числом 5 було непарне число, то перед стояв би мінус.

У тому випадку, коли число чинників n = 2, друга складова оцінюється однозначно по теоремі Піфагора:

$$\xi_2 = \pm\sqrt{\rho_{\text{сл.п}}^2 - \xi_1^2}. \quad (7.27)$$

Знак перед ξ_2 встановлюють також по таблиці випадкових чисел: якщо після числа 5 в стовпці стоїть непарне число (в даному випадку це 03), то ставлять мінус, тобто $\xi_2 = -\sqrt{15^2 - 5^2}$ = -14. Якби після числа 5 було парне число, то перед ξ_2 стояв би плюс.

Нехай в загальному випадку є n чинників; тоді після вибору ξ_1 продовжують вибирати з тієї ж таблиці ξ_2, ξ_3,..., ξ_{n-1}, використовуючи умову $|\xi_{k+1}| \leq \sqrt{\rho_{\text{сл.п}}^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_k^2}$ (де k = 1, 2, ..., n-2) і встановлюючи їхні знаки за попереднім випадковим числом. Останню складову ξ_n визначають однозначно по теоремі Піфагора:

$$\xi_n = \pm\sqrt{\rho_{\text{сл.п}}^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_{n-1}^2}; \qquad (7.28)$$

знак ξ_n встановлюють по числу, наступного в таблиці за ξ_{n-1}. Складову ξ_i відкладають від початкової точки А0 (відповідно до присвоєного їй знаку) в негативному або позитивному напрямку від початкової точки паралельно своєї факторной осі x_i. В даному прикладі ξ_1 = +5, ξ_2 = –14, тому на рис. 7.7 складова ξ_1 відкладена вправо, а ξ_2 — вниз.

3. У початковій точці A_0 і в точці, яка є кінцем вектора, виконують пробні випробування, отримані значення відгуку порівнюють. Якщо відгук у вихідній точці менше, ніж в кінці вектора $\vec{\xi}$, то здійснюють робочий крок за напрямком цього вектора, а якщо, навпаки, у вихідній точці A_0 відгук більше, ніж в кінці вектора $\vec{\xi}$, то робочий крок здійснюють в протилежному напрямку. Розмір робочого кроку $a_{сл.п.}$ зазвичай вибирають з умови

$$a_{\text{сл.п}} \geq \rho_{\text{сл.п}}. \qquad (7.29)$$

В даному прикладі робочий крок здійснений в точку A_1 (рис. 7.7).

4. Точку A_1 приймають за нову початкову точку і знову визначають складові нового випадкового вектора (за тією самою описаною процедурою).

5. Якщо після k-го робочого кроку пробні випробування в черговий базової точки і в кінці пробного вектора $\vec{\xi}_k$ дадуть однакові значення відгуку, то напрямок робочого кроку вибирають випадково - уздовж або проти напрямку вектора $\vec{\xi}_k$. Якщо на k-му кроці відгуки в новій базовій точці і в пробної точці кінця вектора $\vec{\xi}$ менше, ніж відгук в старій базовій точці на (k-1) -му кроці, то повертаються в (k-1)-у вихідну точку і вибирають інший випадковий напрям вектора $\vec{\xi}_{k-1}$.

6. Критерієм виходу до екстремуму є той факт, що на всі боки від чергової базової точки, тобто в будь-якій точці кола або сфери з центром в цій базовій точці, відгук виявляється меншим, ніж в досягнутій базовій точці. В цьому випадку випадкові пробні точки слід доповнити регулярно обраними, щоб коло або сфера виявилася досить добре обстеженою. У разі необхідності та за наявності можливості для цього ставлять паралельні випробування.

Переваги методу випадкового пошуку:

1) вибір випадкового вектора для виконання пробного випробування не залежить від випадкових завад і форми поверхні відгуку;

2) простота алгоритму, що дозволяє легко реалізувати його;

3) можливість простого введення в алгоритм пошуку операції самонавчання, яка істотно підвищує ефективність методу;

4) метод особливо ефективний для оптимізації багатофакторних об'єктів в умовах великого числа обмежень, що особливо важливо при проектуванні нових об'єктів;

5) з ростом числа n чинників ефективність методу зростає.

Недоліки:

1) в загальному випадку напрямок робочих кроків не є оптимальним;

2) при відсутності програм самонавчання метод істотно менш ефективний, ніж методи крутого сходження і симплексний;

3) мала ефективність в умовах пологих поверхонь відгуку.

7.7 Загальні зауваження

Зробимо кілька загальних зауважень щодо розглянутих вище методів пошуку екстремуму.

1. На точність виходу в область екстремуму впливають завади, тому при наближенні до екстремуму в разі статистичного об'єкта рекомендується виконувати паралельні випробування в намічених точках факторного простору (пробних і робочих), що дозволить точніше виділити збільшення відгуку в умовах завад, тобто підвищити точність знаходження екстремуму.

2. Ефективність кожного з розглянутих методів залежить від конкретних умов, зокрема від форми поверхні відгуку: крута вона або полога, чи має яскраво виражені порушення плавності (вузькі гребені, яри тощо). Мистецтво дослідника полягає в тому, щоб правильно підібрати метод пошуку, найбільш відповідний для конкретних умов (форма поверхні відгуку, рівень шумів тощо).

3. Якщо поверхня відгуку має кілька екстремумів, то жоден з перерахованих методів не дає гарантії в тому, що досягнутий глобальний, а не локальний екстремум. Для впевненого знаходження глобального (тобто головного, найбільшого екстремуму в усій області можливої зміни чинників) рекомендується застосовувати багаторазовий пошук, причому кожен раз його слід починати з різних ділянок факторного простору. Якщо є можливість отримати математичний опис високих порядків для всієї області до-

пустимих значень або локальні математичні описи, що охоплюють всю цю область, то це може надійно вирішити питання, чи є знайдений екстремум в дійсності глобальним або лише локальним.

4. На більшості реальних об'єктів можуть бути встановлені обмеження, і в цих умовах застосування методів пошуку має свої особливості, про які піде мова в наступному параграфі.

7.8 Планування екстремальних пошукових експериментів при обмеженнях

Більшість реальних об'єктів мають два типи обмежень: факторні і функціональні. факторними називають обмеження, які накладаються на вхідні змінні, тобто обмеження типу

$$\min\{x_i\} \leq x_i \leq \max\{x_i\}, \quad (7.30)$$

(i – номер чинника; i = 1, 2, ..., n). Функціональними називають обмеження, що накладаються на цільові функції і характеризують кількісні або якісні сторони роботи об'єкта:

$$\min\{y_p\} \leq y_p \leq \max\{y_p\}, \quad (7.31)$$

де p - номер відгуку (вихідної змінної). На рис. 7.8 наведено приклад, коли на об'єкті присутні і факторні (за чинниками x_1, x_2) і функціональні (за функцією відгуку y_{I}, y_{II}) обмеження, причому для x_1 нижня межа збігається з нульовим значенням цього чинника, основна функція відгуку y_{I} обмежена тільки знизу, а контрольована функція відгуку y_{II} обмежена тільки зверху. Прикладом факторного обмеження може слугувати обмеження швидкості прокатки металу на прокатному стані: нижнє обмеження визначається плановим завданням і економічними міркуваннями, верхнє - технічними можливостями електричних приводних двигунів, міцністю вузлів прокатного стану тощо. Прикладом функціонального обмеження може слугувати випуск заданого обсягу продукції з хімічного реактора: цей обсяг повинен бути не нижче планового. При цьому зазвичай існує додаткове обмеження, наприклад відсоток сторонніх домішок в готовому продукті повинен бути не вище допустимого.

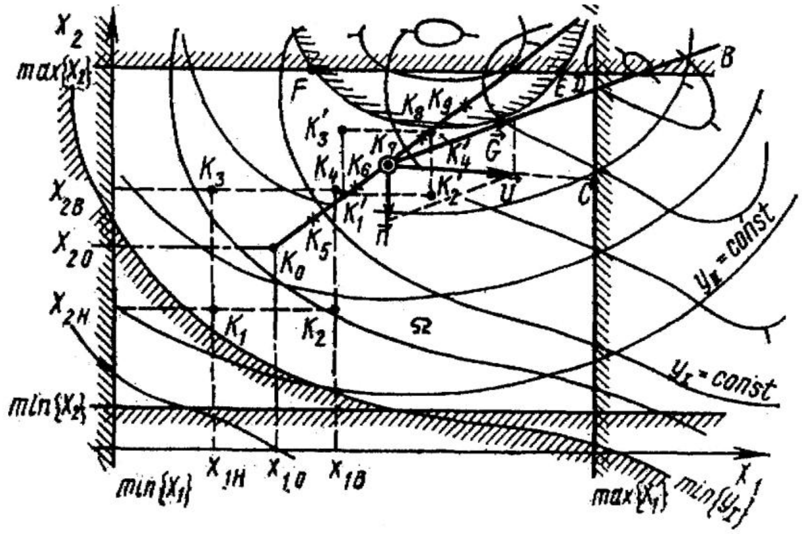


Рис. 7.8 Факторні (за чинниками x_1, x_2) і функціональні (за функцією відгуку y_I, y_{II}) обмеження на об'єкті

Відзначимо, що якщо деякі технологічні процеси дозволяють виходити за межі області обмежень, хоча б з метою вивчення, то в інших виробничих процесах вихід за ці межі викликає аварію (наприклад, витікання каталізатора, вибух тощо). В останньому випадку особливо важливо враховувати обмеження.

На рис. 7.8 концентричними кривими ілюструються лінії постійного рівня цільових функцій:

$y_p(\vec{x})$=f$(x_1, x_2,...x_n)$ = const, (7.32)

де p = I, II, а $n = 2$. Штрихуванням позначені межі допустимої області. Якщо екстремальна точка знаходиться всередині цієї області, то пошукові методи з урахуванням обмежень дозволяють вийти в район цієї точки. Якщо ж екстремум знаходиться поза області обмежень, як на рис. 7.8, то пошуковими методами в умовах обмежень можна знайти лише локальний екстремум, під яким розуміється оптимальне значення цільової функції на межі області обмежень. На рис. 7.8 це точка D в правому верхньому куті області обмежень.

Завдання пошукової оптимізації при наявності обмежень формулюється так: за допомогою цілеспрямованого пошуку знайти координати максимуму цільової функції y_i всередині області обмежень, визначеної нерівностями (7.30) і (7.31), тобто $\max\{y_I(\vec{x})|_{\vec{x}\in\Omega}\}$. Для вирішення цього завдання використовується модифікований метод крутого сходження. Очевидно, що при русі вздовж градієнта K_0A, знайденого за результатами повного факторного експерименту навколо базової точки K_0 (рис. 7.8), можна дійти тільки до робочої точки K_8, оскільки наступна робоча точка K_6 лежить за межами області обмежень. В таких умовах рух до максимуму проводиться по компромісному напрямку або уздовж меж допустимої області. Процедура модифікованого методу крутого сходження полягає в такому:

1. За вже відомими правилами повного факторного експерименту вибирають базову точку, інтервали варіювання Δx_i (з урахуванням обмежень на чинники), ставлять рандомізоване випробування. При цьому крім цільової функції y_I для контролю рекомендується вимірювати і y_{II}.

2. За вже відомими правилами методу крутого сходження обчислюють оцінки a_i коефіцієнтів для основних нормованих чинників z_i, проводять їх статистичне оцінювання і визначають координати робочих точок K_5, K_6, ... на напрямку градієнта K_0A (рис. 7.8).

3. Якщо функціональні обмеження в пробних дослідах не порушені, то ставлять уявні і реальні випробування в запланованих робочих точках. Тут є відмінності від звичайного методу крутого сходження. По-перше, реальні випробування при наявності обмежень повинні ставитися частіше, ніж без них. По-друге, у всіх робочих точках, крім основної цільової функції y_{I}, обов'язково виконують вимірювання контрольованої цільової функції y_{II}. Якщо на напрямку K_0A невідомі межі допустимої області Ω, то робочий рух здійснюють до локального екстремуму на напрямку градієнта K_0A. Якщо ж після чергової робочої точки виявлено функціональне обмеження, то повертаються до попередньої робочої точці.

4. Якщо локальний екстремум досягнуто, то цю точку приймають за нову базову точку і переходять, як в звичайному методі, до другого циклу крутого сходження. Якщо ж зустрічається функціональне обмеження типу

$$\min\{y_{\text{II}}\} \leq y_{\text{II}} \leq \max\{y_{\text{II}}\}, \qquad (7.33)$$

то за нову базову точку приймають попередню робочу точку, на один робочий крок (або трохи більше) віддалену від межі (7.33). В даному прикладі це точка K_7.

5. Навколо нової базової точки K_7 організовують новий повний факторний експеримент (або дробний факторний експеримент), для чого вибирають нові, зменшені інтервали варіювання. При цьому виявляють підвищену увагу до можливих порушень факторних і функціональних обмежень.

В цьому повний факторний експеримент обов'язково крім y_{I} вимірюють і контролюють цільову функцію y_{II}.

6. За результатами рандомізованих випробувань нового повного факторного експерименту обчислюють і статистично перевіряють оцінки a_i і b_i коефіцієнтів для двох регресійних моделей в нормованому масштабі:

$$y_I = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 z_1 + \mathrm{a}_2 z_2 + \ldots + \mathrm{a}_n z_n, \tag{7.34}$$

$$y_{\mathrm{II}} = \mathrm{b}_0 + \mathrm{b}_1 z_1 + \mathrm{b}_2 z_2 + \ldots + \mathrm{b}_n z_n. \tag{7.35}$$

7. За допомогою оцінок a_i визначають новий напрямок вектора градієнта G основної функції y_{I}, що оптимізується, а за допомогою оцінок b_{i} знаходять напрям вектор-нормалі n до ліній постійного рівня контрольованої цільової функції y_{II}. Практично в даному випадку вектор-нормаллю n слугує вектор антиградієнту y_{II}. Компромісним вектором для продовження руху до максимуму слугує вектор U (рис. 7.8), який є геометричною (векторною) сумою векторів G і n, тобто $U = G + n$. Для обчислення координат k-х робочих точок в реальному масштабі на напрямку компромісного вектора U можна використовувати розрахункову формулу

$$x_{\mathrm{ik}} = \mathrm{x}'_{\mathrm{i0}} + \mathrm{k}\left(\lambda_{\mathrm{Iiокр}} - \lambda_{\mathrm{IIiокр}}\right), \tag{7.36}$$

де $\lambda_{\mathrm{Iiокр}}$ и $\lambda_{\mathrm{IIiокр}}$ – округлені за формулою (7.23) значення розрахункових складових, відповідно λ_{Ii} і λ_{IIi}, які, в свою чергу, обчислюються за вже відомою формулою (7.22): $\lambda_{\mathrm{Ii}} = \mathrm{a}_i \Delta \mathrm{x}_i$, $\lambda_{\mathrm{IIi}} = \mathrm{b}_i \Delta \mathrm{x}_i$, а x'_{i0} - це i-а координата нової базової точки (на рис. 8 точка K_7).

8. У робочих точках на напрямку вектора U ставлять уявні і реальні випробування, в яких отримують розрахункові і спостережувані значення як основний оптимізується функції y_{I}, так і контрольованою y_{II}.

9. Якщо на напрямку вектора U (або на первинному напрямі вектор-градієнт K_0A) зустрічається факторне обмеження типу (7.30) (на рис. 7.8 точка C), то рух до екстремуму продовжують уздовж факторної межі $\min\{x_i\}$ (або $\max\{x_i\}$), для чого координати чергових робочих точок обчислюють за формулою (7.36) для всіх чинників, крім x_i. Координати цих робочих точок по чиннику x_i приймають однаковими

$$x_{\mathrm{ik}} = \max\{x_i\} = \mathrm{const} \text{ або } x_{\mathrm{ik}} = \min\{x_i\} = \mathrm{const} \qquad (7.37)$$

в залежності від конкретного випадку. Якщо обмеження типу (7.30) записується у вигляді $\min\{x_i\} < \mathrm{x}_i < \max\{x_i\}$, то слід відступити від такої факторної межі на безпечну відстань.

10. Рух до максимуму припиняють в одному з таких випадків:

а) досягнуто локальний екстремум при русі вздовж факторної межі при одній з умов (7.37);

б) зустрінута друга факторна межа (цей випадок ілюструється точкою D на рис. 7.8);

в) при русі вздовж факторної межі зустрінуте функціональне обмеження по контрольованій цільовою функцією y_{II} (точки E і F).

У всіх цих випадках виявляється досягнутим локальний екстремум. Якщо ж на черговому циклі крутого сходження всередині області Ω за результатами пробних випробувань повного факторного експерименту всі оцінки a_i виявляються статистично незначущими, тобто grad $\mathrm{y}_{\mathrm{I}} \approx 0$, То вважається досягнутим безумовний екстремум. Однак оскільки досягнутий екстремум (локальний або нелокальний) може виявитися лише локальним, пошук слід повторити з іншої базової точки, обраної в протилежному боці області обмежень в порівнянні з вихідною базовою точкою K_0 або обраної випадковим чином.

7.9 Порядок виконання роботи

1. Відповідно до номеру з списку вибрати дані з таблиці 7.2.

2. Задати модель об'єкта з двома факторами x_1, x_2, встановивши такі значення коефіцієнтів: a_0, a_1, a_2, a_{12}, a_{11}, a_{22}.

3. Прийняти в якості базової точку з координатами x_{10} і x_{20}.

4. Провести пошук точки максимуму оптимізованої цільової функції при завданні на моделі середньої квадратичної помилки відтворюваності відгуку $\sigma_y = 2$ методом Гаусса-Зайделя при $\Delta x_1 = \Delta x_2$.

7.10 Контрольні запитання

1. Як формулюється задача оптимізації?

2. Якими підходами можна вирішити задачу оптимізації?

3. Що спільного у всіх методів експериментального пошуку екстремуму?

4. В чому полягає основна ідея і процедура методу Гаусса-Зайделя?

5. У чому полягає основна ідея і процедура звичайного методу градієнтів?

6. У чому полягає ідея і процедура методу Кіфера-Вольфовица?

7. В чому полягає ідея і процедура методу крутого сходження?

8. У чому полягає ідея і процедура симплексного методу?

9. У чому полягає ідея і процедура методу випадкового пошуку?

Таблиця 7.2

Вихідні дані

Варіант	a_0	a_1	a_2	a_{12}	a_{11}	a_{22}	x_{10}	x_{20}	Δx_1
1	4	4	5	3	-4	-5	15	85	15
2	4,2	4,1	5,1	3,2	-4,1	-5,2	16	84	14
3	4,1	4,2	5,2	3,1	-4,2	-5,3	14	86	16
4	4,2	4,2	5,1	3,2	-4,1	-5,2	16	84	14
5	4,3	4,1	5,1	3,1	-4,2	-5,1	14	86	15
6	4,2	4,3	5,2	3,3	-4,3	-5,2	15	85	14
7	4,1	4,3	5,3	3,1	-4,2	-5,3	14	86	16
8	4,3	4,2	5	3,3	-4,1	-5,2	16	87	17
9	4,2	4,3	5,1	3,2	-4,3	-5,4	14	84	16
10	4,1	4,4	5,2	3,4	-4,1	-5,1	15	86	13
11	4,3	4,2	5,3	3	-4,2	-5	17	83	14
12	4,2	4,1	5,4	3,3	-4,4	-5,4	13	87	16
13	4,4	4,1	5,2	3,1	-4,2	-5,1	14	84	14
14	3,9	3,9	4,9	3,2	-4,1	-5,2	16	86	15
15	3,9	4	5,1	3,3	-4,4	-5,3	14	84	16
16	3,9	4,2	5,2	3,1	-4,2	-5,1	16	85	14
17	3,8	4,2	5,2	3,2	-4,1	-5,3	15	85	15
18	3,8	4,1	5,3	3,3	-4,3	-5,2	14	86	16
19	3,8	4	5,1	3,4	-4,2	-5,1	17	84	14
20	4,1	3,8	5,2	3,1	-4,1	-5,4	16	83	16
21	4,2	3,8	5	3,2	-4,3	-5,2	15	86	18
22	4,3	3,8	5,3	3,4	-4,3	-5,3	14	83	17
23	4,1	3,9	5,4	3,3	-4,2	-5,1	15	82	16
24	4,2	3,9	5,2	3,2	-4,1	-5	18	85	15
25	4,3	3,9	5,1	3,1	-4	-5,2	17	86	14

10. Порівняйте відомі пошукові методи по завадостійкості в сенсі вибору напрямку руху.

11. Порівняти пошукові методи по завадостійкості в сенсі точності виходу до екстремуму.

12. Порівняти методи пошуку по ефективності (швидкості виходу до екстремуму).

13. Які переваги і недоліки пошукових методів?

14. Що є критерієм досягнення екстремуму в згаданих пошукових методах?

15. У чому полягає роль уявних випробувань і як вони проводяться

16. Як виконується статистичний аналіз результатів в методі крутого сходження?

17. Як формулюється задача оптимізації при наявності обмежень?

18. Що таке факторні і функціональні обмеження?

19. Як вибирається базова точка в області обмежень?

20. Чим відрізняється модифікований метод крутого сходження від звичайного?

21. Сформулювати критерії для припинення крутого сходження при заданих обмеженнях.

Практична робота №8

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЖЕРЕЛ ЗА ТЕМОЮ МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ

Мета роботи – *вивчення основних вимог до магістерської дисертації, написання вступу та першого розділу магістерської дисертації.*

8.1 Загальні поняття

Кваліфікація «магістр» відображає рівень готовності студента до самостійної професійної роботи і присуджується за результатами захисту магістерської дисертації.

Загальна структура магістерської дисертації така:

Вступ – це короткий перелік виконаного в дисертації. Актуальність теми, наукова новизна та практичне значення отриманих результатів.

Основна частина магістерської дисертації складається з чотирьох послідовних розділів:

- розділ перший – стан питання, мета та задачі;
- розділ другий – теоретичні розробки за темою дисертації;
- розділ третій – експериментальне підтвердження теорії;
- розділ четвертий – реалізація на ринку (startup).

Висновки: Загальні висновки та рекомендації за результатами роботи

Використані джерела: Перелік використаних джерел.

Додатки (в разі необхідності).

8.2 Тема та план дисертації

Тему магістерської дисертації формулюють студент-магістрант разом із керівником у рамках напряму магістерської програми і спеціалізації кафедри. Тема магістерської дисертації повинна бути короткою, відповідати обраній спеціалізації та суті наукового питання, що вирішується, вказувати на мету дослідження та його завершеність. Іноді для більшої конкретизації до назви слід додати невеликий (4–6 слів) підзаголовок. Наприклад: Магістерська дисертація. Організаційні питання.

У назві не бажано використовувати ускладнену термінологію псевдонаукового характеру. Треба уникати назв, що починаються зі слів: Дослідження питання ..., Вивчення деяких шляхів ..., Деякі питання ..., в яких не відбито в достатній мірі суть проблеми.

Затвердження теми. Після узгодження з керівником теми дисертації студент-магістрант подає про це інформацію в письмовому виді відповідальному за дипломне проектування по кафедрі. Далі тема магістерської дисертації обговорюється й затверджується на засіданні кафедри та наказом по університету. Після затвердження теми її зміна можлива тільки після спеціального наказу по інституту з поясненням, чому саме необхідно змінити тему магістерської дисертації.

План. Разом з науковим керівником магістрант розробляє план магістерської дисертації. План затверджують керівник та завідувач кафедри.

8.3 Структура дисертації

Магістерська робота повинна містити такі структурні частини:

1 титульний аркуш;

2 зміст;

3 перелік умовних позначень (при необхідності);

4 вступ;

5 розділ перший – аналітичний (стан питання);

6 розділ другий – теоретичний (теорія дослідження);

7 розділ третій – експериментальний (підтвердження теорії);

8 розділ четвертий – startup (ринок);

9 висновки за роботою;

10 список використаної літератури;

11 додатки (при необхідності).

Вступ. Вступ розкриває сутність і стан наукової проблеми (задачі) та її значущість, підстави і вихідні дані для розробки теми, обґрунтування необхідності проведення дослідження. Вступ має відобразити загальну характеристику магістерської роботи у такій послідовності (всі перелічені пункти є обов'язковими):

1. актуальність теми;
2. зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами;
3. мета і завдання дослідження;
4. об’єкт дослідження;
5. предмет дослідження;
6. методи дослідження;
7. наукова новизна отриманих результатів;
8. практичне значення отриманих результатів;
9. особистий внесок магістранта;
10. апробація результатів роботи;
11. публікації;
12. структура роботи.

Актуальність теми. Шляхом критичного аналізу та порівняння з відомими розв’язаннями проблеми (наукової задачі) обґрунтовують актуальність та доцільність роботи для розвитку відповідної галузі науки, виробництва, особливо на користь України. Досить кількома реченнями висловити сутність узагальненої проблеми (проблеми, яка притаманна всім/більшості об'єктів дослідження).

Наприклад: Традиційні підходи до керування … не враховують особливості …. що призводить до … Тому необхідно створити нові … та тим самим підвищити … сучасного виробництва …

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Коротко викладають зв'язок обраного напрямку досліджень із планами навчального закладу, організації, із галузевими та/або державними планами і програмами, якщо цей зв'язок є. Зазначають номери державної реєстрації науково-дослідних робіт, базових для підготовки та подання магістерської роботи, а також і роль автора у виконанні цих науково-дослідних робіт.

Мета і задачі дослідження. Коротко формулюють мету роботи і задачі, які необхідно вирішити для досягнення поставленої мети.

Мета дослідження - це формулювання у загальному виді того, що повинно бути досягнуто в результаті дослідження.

Наприклад: … підвищення продуктивності свердління отворів у титанових сплавах за рахунок оптимізації геометричних параметрів свердла …

Не слід формулювати мету як «Дослідження. . . », «Вивчення. . . », тому що ці слова вказують на процес, а не на результат.

Задачі дослідження - це те, що треба зробити аби досягнути поставленої мети.

Наприклад:

1. Вивчення характеру зміни кутів вздовж кромки ...

2. Створення математичної моделі крила літака при …

Об'єкт дослідження – це процес або явище, або фізичний об'єкт, що породжує проблемну ситуацію та обраний магістрантом для вивчення.

Предмет дослідження – міститься в межах об'єкта дослідження. Це якась конкретна риса об'єкту дослідження. Це те, що магістрант планує вивчати під час роботи над дисертацією.

Наприклад:

Об'єкт дослідження	Предмет дослідження
Свердло	Характер зношування різальної кромки залежно від геометричних параметрів …
Процес утворення отворів	Розподіл температур на різальній кромці при утворення отворів …
Рух міського транспорту	Вплив погоди на дистанцію між транспортними засобами …

Методи дослідження. Подають перелік використаних методів дослідження для досягнення поставленої в роботі мети. Перераховувати їх треба не відірвано від змісту роботи, а коротко та змістовно визначаючи, що саме досліджувалось тим чи іншим методом. Це дасть змогу пересвідчитися в логічності та прийнятності вибору саме цих методів.

Наприклад:

1. Виконані дослідження базуються на методах математичного моделювання за методом скінчених елементів.

2. Проведені дослідження умов формоутворення базуються на кінематичному методі запропонованому у 1886 році Х.І. Гохманом …

Наукова новизна одержаних результатів. Подають коротку анотацію нових наукових положень (рішень), запропонованих студентом особисто. Необхідно показати відмінність одержаних результатів від відомих, описати ступінь новизни (вперше одержано, удосконалено, дістало подальший розвиток). Головним у науковій новизні є формулювання того, що вже було до вас, плюс те що особисто ви внесли для поліпшення об'єкту дослідження. Наукову новизну формулюють з трьох складових частин:

1. що зроблено особисто вами;
2. що нове ви пропонуєте;
3. що буде отримано завдяки вашим ідеям.

Наприклад: Розроблено підхід до формування сукупності (що зроблено) … на машинобудівному виробництві, які на відміну від відомих моделей враховують температурний режим (нове) … що дозволяє підвищити продуктивність процесу утворення (буде отримано) …

До цього пункту не можна включати опис результатів, отриманих у вигляді способів, пристроїв, методик, схем, алгоритмів тощо.

Усі наукові положення з урахуванням досягнутого ними рівня новизни є теоретичною основою (фундаментом) вирішеного в роботі наукового питання. Насамперед за це здобувачеві присуджується освітньо-кваліфікаційний рівень магістра.

Практичне значення одержаних результатів. У магістерській роботі, що має теоретичне значення, треба подати відомості про наукове використання результатів досліджень або рекомендації щодо їхнього використання, а в магістерської роботи, що має прикладне значення, — відомості про практичне застосування одержаних результатів або рекомендації щодо їхнього використання.

Не треба плутати наукову новизну (що вперше зроблено) з практичним значенням (що воно дало людству) результатів роботи над дисертацією.

Наукова новизна	Практичне значення
Розроблена математична модель …	Отримано інструмент оптимальної геометрії … що дозволило підвищити … та знизити … не змінюю-

	чи …
Вивчено процес утворення …	Утворення … за запропонованим методом … зменшило витрати … на … що збільшило … та зменшило …

Особистий внесок здобувача. У випадку використання в магістерській роботі ідей або розробок, що належать співавторам, разом з якими були опубліковані наукові праці, здобувач повинен відзначити цей факт у магістерській роботі та в автореферaті з обов’язковим зазначенням конкретного особистого внеску в ці праці або розробки.

Наприклад:

1. Автором роботи було особисто розроблено методику … проведено експеримент … та оброблено отримані результати …

2. Математична модель … розроблена у співавторстві з …

Апробація результатів дисертації. Вказується, на яких наукових з’їздах, конференціях, симпозіумах, нарадах оприлюднені результати досліджень, що включені до дисертації.

Наприклад: Зроблено 2 доповіді на міжнародній конференції молодих вчених у Чикаго штат Іллінойс та одну на з'їзді Американської спільноти інженерів-механіків.

Публікації. Вказують, у яких монографіях, статтях у наукових журналах, збірниках наукових праць, матеріалах і тезах конференцій, патентах опубліковані результати роботи.

Наприклад: По темі магістерської дисертації : опубліковано 3 роботи, з них 2 статті видані в спеціалізованих наукових виданнях, затверджених ВАК України. Подано 1 патент на корисну модель.

Структура роботи відображає загальні відомості про роботу.

Наприклад: Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, загальних висновків, списку використаних джерел із 29 найменувань, 2 додатків. Основний текст дисертації викладено на 64 стор. Повний обсяг дисертації становить 126 стор.

8.4 Розділ перший

Перший розділ це аналітичне дослідження джерел за темою магістерської роботи. У розділі викладають стан об'єкту дослідження на теперішній час. Аналізують що вже зроблено іншими дослідниками та які питання потребують подальших досліджень.

Ідея першого розділу. Дослідити, що є в світі за темою дисертації, виявити проблеми. Сформулювати мету та задачі подальшого дослідження. Необхідно проаналізувати як позитивні, так і негативні сторони об'єкту дослідження. Характеризуючи рівень наукової розробки досліджуваної теми, не можна обмежуватись тільки переліком джерел. В аналізі джерел слід відобразити різні погляди з питання, що вивчається. Якщо вибраний об'єкт дослідження вже достатньо вивчений, необхідно обґрунтувати, чому він все ж потребує подальшого опрацьовування. Тобто показати (знайти) невирішені питання. Якщо вибраний об'єкт дослідження є абсолютно новим, потрібно навести роз'яснення щодо того, чому він заслуговує на увагу.

В аналізі стану питання, магістрант окреслює основні етапи розвитку об'єкту дослідження. Висвітлюючи роботи попередників, магістрант формулює ті питання, що залишились невирішеними, обґрунтувавши таким чином актуальність його дослідження. Ні в якому разі неприпустимо описувати в цьому розділі принцип роботи об'єкту дослідження або взаємодію його окремих елементів.

Стан питання це висвітлення основних характеристик аналогів об'єкту дослідження, які вже існують. Спочатку позитивних (переваг над іншими), а потім негативних (які породжують проблеми). Не слід плутати аналіз стану питання по досліджуваній темі з описом роботи (або конструкції) предмету що підлягає аналізу. Аналіз це стисла характеристика позитивних та негативних сторін об’єкту.

Неприпустимо	Вірно
Досліджувана конструкція … діє таким чином. Цей гвинтик … а оцей … а он той ще й … через що коліщатко … яке має не крутить коліщатко … яке не має … ну і так далі	Досліджувана конструкція … дозволяє отримати підвищену (позитив) … але … її робота супроводжується значними (негатив) … через малу (причина) … … виконавчих органів.

Закінчується перший розділ обґрунтовуванням та формулюванням питання і напрямком його вирішення, тобто:

- питання (узагальнене для об’єктів аналізу/дослідження);
- мета дослідження (одним реченням, чого треба досягти для вирішення проблеми):
- задачі дослідження (перелік по пунктах того, що треба зробити для досягнення мети).

Приклади формулювань:

Актуальність: Аналіз існуючих конструкцій свердел показав, що вони не забезпечують високу продуктивність оброблення титанових сплавів через малу стійкість інструменту, яка обумовлена …

Мета дослідження: Підвищення продуктивності свердління отворів у титанових сплавах за рахунок оптимізації геометричних параметрів свердла …

Задачі дослідження

1. Вивчення характеру зміни кутів вздовж кромки ...

2. Створення математичної моделі крила літака при …

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский /О. В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976.

2. *Дэншел К.* Применение статистики в промышленном эксперименте. – М.: Мир, 1979.

3. *Закс Л.* Статистическое оценивание. – М.: Статистика, 1976.

4. *Зуховицкцй С.Я., Авдеева Л.Я.* Линейное и выпуклое программирование – М.: Наука, 1964, 1967

5. *Иванов А. 3., Круг Г. К., Филаретов Г. Ф.* Статистические методы и инженерных исследованиях. Регрессионный анализ. – М.: МЭИ, 1977.

6. *Иванов А. 3., Круг Г. К., Филаретов Г. Ф.* Статистические методы п инженерных исследованиях. Планирование первого порядка для регрессионных экспериментов. – М.: МЭИ, 1978.

7. Математическое описание и оптимизация многофакторных процессов / Под ред. Г. К. Круга. – Труды МЭИ, 1966, вып. 67

8. Методичні вказівки з організаційних питань магістерської роботи за спеціальністю 133 – Галузеве машинобудування. Спеціалізація - “Інструментальні системи та технології формоутворення деталей”.[Текст] / Уклад.: В.А. Пасічник, В.І. Солодкий, О.В. Глоба,. КПІ ім. І. Сікорського. – 2016, – 64 с.

9. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений – М.: Наука. – 1971.

10. *Налимов В. В., Чернова Н. А.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965.

11. Некоторые вопросы математического описания и оптимизации многофакторных процессов /Под ред. Г. *К. Круга.* – Труды МЭИ, 1963, вып. 51.

12. *Растригин Л.А.* Статистические методы поиска. – М.: Наука, 1968

13. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Краткий курс математической статистики для технических приложений – М.: Физматгиз. – 1959.

14. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями – М.: ИЛ. – 1956.

15. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами. – М.; Мир, 1973.

16. *Химмельблау Д.М.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахрушин В.Є. Методи аналізу даних: навчальний посібник для студентів – Запоріжжя : КПУ, 2011. – 268 с.

2. Василенко О. А. Сенча І. А. Матемачно-статистичні методи аналізу у прикладних дослідженнях: навч. посіб. – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2011. – 166 с.

3. Костюк В. О. Прикладна статистика: навч. Посібник. - Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. - 191с.

4. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В., Орел Б. П., Штабалюк П. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.

5. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.

6. Тринько Р. І., Стадник М. Є. Основи теоретичної і прикладної статистики: навч. посіб. Київ : Знання, 2011. - 397 с.

7. Bendat Julius S., Piersol Allan G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures – Wiley, 2010. - 640 p.

8. Bendat Julius S., Piersol Allan G. Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis — Wiley, 2013. - 472 p.

9. DeCoursey W.J. Statistics and probability for engineering applications with Microsoft Excel- Elsevier Science (USA), 2003. - 417 p.

10. Dennis Wackerly, Richard L. Scheaffer, William Mendenhall Mathematical Statistics with Applications - Thomson Higher Education © 2008 - 914 p.

Додаток А

Таблиця рівномірно розподілених чисел в інтервалі від 0 до 99

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76	80	95	90	91	17	39	29	27	49	49
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37	20	63	61	04	02	00	82	29	16	65
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60	15	95	33	47	64	35	08	03	36	06
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65	88	67	67	43	97	04	43	62	76	59
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53	98	95	11	68	77	12	17	14	68	33
66	06	57	47	17	34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85	11	19	92	91	70
31	06	01	08	05	45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39	23	40	30	97	32
85	26	97	76	02	02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47	18	62	38	85	79
63	57	33	21	35	05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09	83	49	12	56	24
73	79	64	57	53	03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44	35	27	38	84	35
98	52	01	77	67	14	90	56	86	07	22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	37	98
11	80	50	54	31	39	80	82	77	32	50	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
83	45	20	96	34	06	28	89	80	83	18	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
88	68	54	02	00	86	50	75	84	01	36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
99	59	46	73	48	37	51	76	49	69	91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74	73	03	95	71	86	40	21	81	65	44
80	12	43	56	35	17	72	70	70	15	45	31	82	23	74	21	11	57	82	53	14	38	55	37	63
74	35	09	98	17	77	45	27	72	14	43	23	60	02	10	45	52	16	42	37	96	28	60	26	55
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03	76	62	11	39	90	94	40	05	64	18
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88	96	29	77	88	22	54	38	21	45	98
91	49	91	45	23	68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23	37	08	92	00	48
80	33	69	45	98	26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40	42	05	08	23	41
44	10	48	19	49	85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	21	22	22	20	64	13
12	55	07	37	42	11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39	28	70	72	56	15
63	60	64	93	29	16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82	07	20	73	17	90
61	19	69	04	46	26	45	74	77	74	61	92	43	37	29	65	39	45	95	93	42	58	26	05	27
15	47	44	52	66	95	27	07	99	53	59	36	78	38	48	82	39	61	01	18	33	21	15	94	66
94	55	72	85	73	67	89	75	43	87	54	62	24	44	31	91	19	04	25	92	92	92	74	59	73
42	48	11	62	13	97	34	40	87	21	16	86	84	87	67	03	07	11	20	59	25	70	14	66	70
23	52	37	83	18	73	20	88	98	37	68	93	69	14	16	26	25	22	96	63	05	52	28	25	62
04	49	35	24	94	75	24	63	38	24	45	86	25	10	25	61	96	27	93	35	68	73	71	24	72
00	54	99	76	54	64	05	18	81	69	96	11	96	38	96	54	69	28	23	91	23	28	72	95	29
35	96	31	53	07	26	89	30	93	64	33	35	13	54	52	77	97	45	00	24	90	10	33	93	33
59	80	80	83	91	45	42	72	68	42	83	60	94	97	00	13	02	12	48	92	78	56	52	01	00
46	05	88	52	36	01	39	09	22	86	77	28	14	40	77	93	91	08	38	47	70	61	74	29	41
32	17	90	05	97	89	37	92	52	41	05	56	70	70	07	86	74	31	71	57	95	39	41	18	38
69	23	46	14	06	20	11	74	52	04	15	95	66	00	00	18	74	39	24	23	97	11	89	63	88

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
19	56	54	14	30	01	75	87	53	79	40	41	52	15	85	66	67	43	68	06	84	96	28	52	07
45	15	51	49	38	19	47	60	72	46	43	66	79	45	43	59	04	79	00	33	20	82	66	95	41
94	86	43	19	94	36	16	81	08	51	34	88	88	15	53	01	54	03	54	56	05	51	45	11	76
98	08	62	48	26	45	24	02	84	04	44	99	90	88	96	39	09	47	34	07	35	44	13	18	80
33	18	51	62	32	41	94	15	09	49	89	43	54	85	81	88	69	54	19	94	37	54	87	30	43
80	95	10	04	06	96	38	27	07	74	20	15	12	33	87	25	01	52	52	98	94	62	46	11	71
79	75	24	91	40	71	96	12	82	96	69	86	10	25	91	74	85	22	05	39	00	38	75	95	79
18	63	33	25	37	98	14	50	65	71	31	01	01	46	74	05	45	56	14	27	77	83	89	19	39
74	02	94	39	02	77	55	73	22	70	97	79	01	71	19	52	62	75	80	21	80	81	45	17	48
54	17	84	56	11	80	99	33	71	43	05	33	51	29	69	56	12	71	92	55	36	04	09	53	24
11	66	44	98	83	52	07	98	48	27	59	38	17	15	39	09	97	33	34	40	88	46	12	33	56
48	32	47	79	28	31	24	96	47	10	42	29	53	68	70	32	30	75	75	46	15	02	00	99	94
69	07	49	41	38	87	63	79	19	76	35	58	40	44	01	10	51	82	16	15	01	84	87	69	38
09	18	82	00	97	32	82	53	95	27	04	22	08	63	04	83	38	98	73	74	64	27	85	80	44
90	04	58	54	97	51	58	15	06	54	94	93	88	19	97	91	87	07	61	60	68	47	66	46	59
73	18	95	02	07	47	67	72	62	69	52	29	06	46	64	27	12	46	70	18	41	36	18	27	60
75	76	87	64	90	20	97	18	17	49	90	42	91	22	72	95	37	50	58	71	93	82	34	31	78
08	35	86	99	10	73	64	24	27	85	13	66	15	88	73	04	61	68	75	53	31	22	30	84	20
28	30	60	32	64	81	33	31	05	91	40	51	00	78	93	32	60	46	04	75	94	11	90	18	40
53	84	08	62	33	81	59	41	36	28	51	21	59	02	90	28	46	66	87	95	77	76	22	07	91
91	75	75	77	41	61	61	36	22	69	50	26	39	02	12	65	78	17	65	14	83	48	34	70	65
89	41	59	26	94	00	39	75	53	91	12	60	71	76	46	48	94	97	23	06	94	54	13	74	08
77	51	30	38	22	86	83	42	59	01	58	41	48	27	74	51	90	81	39	80	72	89	35	57	07
19	50	23	71	74	69	97	92	02	88	55	21	02	97	73	74	28	77	52	51	65	34	46	75	15
21	81	85	99	13	93	27	88	17	67	05	68	67	31	56	07	08	28	50	46	31	85	33	84	52
51	47	46	64	99	68	10	72	36	21	94	04	99	13	45	42	83	60	91	91	08	00	74	64	49
99	65	96	83	31	62	53	52	41	70	69	77	71	28	30	74	81	97	81	42	43	86	07	28	34
33	71	34	80	07	93	68	47	28	69	51	92	66	47	21	58	30	32	98	22	93	17	49	39	72
85	27	49	68	93	11	30	32	92	70	28	83	43	41	37	73	51	59	04	00	71	14	84	36	43
84	13	38	96	40	33	03	55	21	66	73	85	27	00	91	61	22	26	05	61	66	32	71	84	23
56	73	21	62	34	17	39	59	61	31	10	12	39	16	22	85	49	65	75	66	81	60	41	88	80
65	13	85	68	06	87	64	88	52	61	34	31	36	58	51	45	87	52	10	68	85	64	44	72	77
38	00	10	21	76	81	71	91	17	11	71	60	29	29	37	74	21	96	40	49	65	58	44	96	98
37	40	29	63	97	01	31	47	65	86	56	27	11	00	86	47	32	46	26	05	40	03	03	74	38
97	12	54	03	48	87	08	33	14	17	21	81	53	92	60	75	23	79	20	47	15	50	12	95	78
21	82	64	11	84	47	14	33	40	72	64	53	88	59	02	59	13	90	64	41	03	85	65	45	59
73	13	54	27	42	95	71	90	90	35	85	79	47	42	96	08	79	98	81	57	64	69	11	92	02

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
07	63	87	79	29	03	06	11	80	73	96	20	74	41	56	23	82	19	95	38	04	71	76	69	94
60	52	88	74	41	07	95	41	98	14	59	17	52	06	95	05	53	35	21	99	61	21	20	44	55
83	59	53	56	55	06	95	89	29	83	05	12	80	97	19	77	43	35	37	83	92	30	15	04	98
10	85	06	26	46	99	59	91	05	47	13	49	90	63	19	53	07	57	18	39	06	41	01	93	62
39	82	09	89	52	43	62	26	31	47	64	42	18	08	14	43	80	00	93	51	31	02	47	31	67
59	58	00	64	78	75	56	97	88	00	88	83	55	44	86	23	76	80	61	56	04	11	10	84	08
38	50	80	73	41	28	79	34	87	63	90	82	29	70	22	17	71	90	42	07	95	95	44	99	53
30	69	27	06	68	94	68	81	61	27	56	19	68	00	91	82	06	76	34	00	05	46	26	92	00
65	44	39	56	59	18	28	82	74	37	49	63	22	40	41	08	33	76	56	76	96	29	99	08	36
27	26	75	02	64	13	19	27	22	94	07	47	74	46	06	17	98	54	89	11	97	34	13	03	58
91	30	70	69	91	19	07	22	42	10	36	69	95	37	28	28	82	53	57	93	28	97	66	62	52
68	43	49	46	88	84	47	31	36	22	62	12	69	84	08	12	84	38	25	90	09	81	59	31	46
48	90	81	58	77	54	74	52	45	91	35	70	00	47	54	83	82	45	26	92	54	13	05	51	60
06	91	34	51	97	42	67	27	86	01	11	88	30	95	28	63	01	19	89	01	14	97	44	03	44
10	45	51	60	19	14	21	03	37	12	91	34	23	78	21	88	32	68	08	51	43	66	77	08	83
12	88	39	73	43	65	02	76	11	84	04	28	50	13	92	17	97	41	50	77	90	71	22	67	69
21	77	83	09	76	38	80	73	69	61	31	64	94	20	96	63	28	10	20	23	08	81	64	74	49
19	52	85	95	15	65	12	25	96	59	86	28	36	82	58	69	59	21	37	98	16	43	59	15	29
67	24	55	26	70	35	58	31	65	63	79	24	68	66	86	76	46	33	42	22	26	65	59	08	02
60	58	44	73	77	67	50	03	79	92	45	13	42	65	29	26	76	68	36	37	41	32	64	43	44
53	85	34	13	17	36	06	69	48	50	58	83	87	38	59	49	36	47	33	31	96	24	04	36	42
24	63	73	87	86	74	38	48	93	42	52	62	30	79	92	12	36	91	86	01	03	74	28	38	73
83	08	01	24	51	38	99	22	28	25	07	75	95	17	77	97	37	72	75	85	51	97	23	78	67
16	44	42	43	34	36	15	19	20	73	27	49	37	09	39	85	13	03	25	52	54	84	65	47	59

Додаток Б

Значення інтегральної функції нормованого нормального розподілу

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-u^2/2} \mathrm{du} = \int_{-\infty}^{u} f(u) \mathrm{du}$$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,9901106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201

Додаток В

Значення нормованої функції Лапласа ймовірностей $\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_x} e^{-z^2/2}\mathrm{dz}$ в залежності від аргументу $t_x = (x - m_x)/\sigma_x$

t_x	Соті долі для t_x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,22157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4174
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4860	0,4864	0,4867	0,4871	0,4874	0,4877	0,4880	0,4883	0,4886	0,4889
2,3	0,4892	0,4895	0,4898	0,4900	0,4903	0,4906	0,4908	0,4911	0,4913	0,4915
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4924	0,4926	0,4928	0,4930	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4937	0,4939	0,4941	0,4942	0,4944	0,4946	0,4947	0,4949	0,4950	0,4952
2,6	0,4953	0,4954	0,4956	0,4957	0,4958	0,4959	0,4960	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4971	0,4972	0,4973
2,8	0,4974	0,4975	0,4975	0,4976	0,4977	0,4978	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980
2,9	0,4479	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986
3,0	0,4986	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989
3,1	0,4990	0,4990	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992
3,2	0,4993	0,4993	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996
3,4	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997
3,5	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,7	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
4,0	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
4,1	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
4,2	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
4,3	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
4,4	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
4,5	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
4,6	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

Додаток Г

q%-ні межі для величини $\chi^2_{\text{кр}}$ в залежності від числа ν ступенів вільності й рівня значимості q для розподілу Пірсона

$\nu \setminus q$	99,5 %	97,5 %	95 %	5 %	2,5 %	0,5 %
1	$0,39 \cdot 10^{-4}$	$0,98 \cdot 10^{-3}$	$0,39 \cdot 10^{-2}$	3,841	5,024	7,879
2	0,010	0,050	0,103	5,991	7,378	10,597
3	0,071	0,216	0,352	7,815	9,348	12,838
4	0,207	0,484	0,711	9,488	11,143	14,830
5	0,412	0,831	1,145	11,070	12,832	16,750
6	0,676	1,237	1,635	12,592	14,449	18,475
7	0,989	1,690	2,167	14,067	16,013	20,278
8	1,314	2,180	2,733	15,507	17,535	21,955
9	1,735	2,700	3,3325	16,919	19,023	23,589
10	2,156	3,247	3,940	18,307	20,483	25,188
11	2,603	3,816	4,575	19,675	21,920	26,757
12	3,074	4,404	5,226	21,026	23,336	28,300
13	3,565	5,009	5,892	22,362	24,736	29,819
14	4,075	5,629	6,571	23,685	26,119	31,319
15	4,601	6,262	7,261	24,996	27,488	32,804
16	5,142	6,908	7,962	26,296	28,845	34,267
17	5,697	7,564	8,672	27,587	30,191	35,713
18	6,265	8,231	9,390	28,869	31,526	37,156
19	6,844	8,907	10,117	30,144	32,852	38,582
20	7,434	9,591	10,851	31,410	34,170	39,897
21	8,034	10,283	11,591	32,671	35,479	41,401
22	8,643	10,982	12,338	33,924	36,781	42,796
23	9,260	11,688	13,091	35,172	38,076	44,181
24	9,886	12,401	13,848	36,415	39,364	45,558
25	10,520	13,120	14,671	37,652	40,646	46,928
26	11,760	13,844	15,379	38,885	41,923	48,290
27	11,808	14,573	16,151	40,113	42,194	49,645
28	12,461	15,308	16,928	41,337	44,461	50,993
29	13,121	16,047	17,708	42,557	45,722	52,336
30	13,787	16,791	18,498	43,773	46,979	53,672
31	14,458	17,539	19,281	44,985	48,232	53,003
32	15,134	18,291	20,072	46,194	49,483	56,328
33	15,815	19,047	20,867	47,400	50,725	57,648
34	16,501	19,803	21,664	48,602	51,966	58,964
35	17,192	20,569	22,465	49,802	53,203	60,275
36	17,887	21,336	23,269	50,998	54,437	61,581
37	18,586	22,106	24,075	52,192	55,668	62,882
38	19,289	22,878	24,884	53,384	56,895	64,181
39	19,996	23,654	25,695	54,572	58,120	65,476
40	20,707	24,433	26,509	55,758	59,342	66,766

Додаток Д

Двосторонні межі для величини $t_{кр}$ в залежності від числа ν ступенів вільності і від рівня значимості q-ймовірності $P\{|t| > |t_{кр}|\}$ для t-розподілу Стьюдента

$\nu \setminus q$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,077	6,313	12,706	31,820	63,656	127,656	318,308	636,619
2	1,885	2,920	4,302	6,964	9,924	14,089	22,327	31,599
3	1,6377	2,3534	3,182	4,540	5,840	7,458	10,214	12,924
4	1,5332	2,1318	2,776	3,746	4,604	5,597	7,173	8,610
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,773	5,893	6,869
6	1,439	1,943	2,446	3,142	3,707	4,316	5,207	5,958
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,998	3,4995	4,0293	4,785	5,4079
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3551	3,832	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,780
10	1,3720	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,105	3,495	4,024	4,437
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,929	4,3178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,852	4,2208
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,976	3,3257	3,7874	4,1405
15	1,3406	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7328	4,0728
16	1,336	1,746	2,119	2,583	2,920	3,252	3,686	4,015
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5668	2,8982	3,2224	3,6458	3,965
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5514	2,8784	3,1968	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,0880	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
21	1,323	1,721	2,079	2,517	2,831	3,135	3,527	3,819
22	1,3212	1,7167	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251
26	1,315	1,706	2,055	2,478	2,778	3,066	3,435	3,706
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,421	3,6896
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,462	2,7564	3,038	3,3962	3,6594
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,75	3,0298	3,3852	3,6466
32	1,308	1,693	2,036	2,448	2,738	3,014	3,365	3,621
34	1,307	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,002	3,3479	3,6007
36	1,305	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	2,99	3,3326	3,5821
38	1,3042	1,686	2,0244	2,4286	2,7116	2,9808	3,319	3,5657
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	2,9712	3,3069	3,5510
42	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698	2,693	3,296	3,537
44	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	2,9555	3,2861	3,5258
47	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,687	2,9488	3,2771	3,5150
48	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	2,9426	3,2689	3,5051
50	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	2,937	3,2614	3,496
55	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	2,924	3,256	3,476
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	2,9146	3,2317	3,4602
65	1,2947	1,6636	1,997	2,3851	2,6536	2,906	3,2204	3,4466
70	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	2,8987	3,2108	3,435
80	1,292	1,664	1,99	2,373	2,638	2,887	3,195	3,416
90	1,291	1,662	1,9867	2,3885	2,6316	2,8779	3,833	3,4019
100	1,2901	1,6602	1,984	2,3642	2,6259	2,8707	3,737	3,3905

Додаток Е

Верхні однобічні межі $F_{кр}$ в залежності від числа ступенів вільності чисельника ν_1 й знаменника ν_2 для F-розподілу Фішера на рівні значимості q=0,05

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,679	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,95
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88

$\nu_2 \backslash \nu_1$	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
1	242	244	246	248	249	250	251	253	253	254
2	19,39	19,41	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,78	8,74	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,57	8,56	8,53
4	5,96	5,91	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,68	5,66	5,63
5	4,47	4,68	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,42	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,72	3,71	3,67
7	3,63	3,57	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,279	3,28	3,23
8	3,34	3,28	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,00	2,98	2,93
9	3,13	3,07	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,77	2,76	2,71
10	2,97	2,91	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,61	2,59	2,54
11	2,86	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,47	2,45	2,40
12	2,76	2,69	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,36	2,35	2,30
13	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,28	2,26	2,21
14	2,60	2,53	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,21	2,19	2,13
15	2,55	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,15	2,12	2,07
16	2,49	2,42	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,09	2,07	2,01
17	2,45	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,04	2,02	1,96
18	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,00	1,98	1,92
19	2,38	2,31	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	1,96	1,94	1,88
20	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,92	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,89	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,87	1,84	1,78
23	2,28	2,20	2,10	2,045	2,00	1,96	1,91	1,84	1,82	1,76
24	2,26	2,18	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,82	1,80	1,73
25	2,24	2,16	2,06	2,00	1,96	1,92	1,87	1,80	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,05	1,99	1,94	1,90	1,85	1,78	1,76	1,69
27	2,20	2,13	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,76	1,74	1,67
28	2,19	2,12	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,75	1,72	1,65
29	2,18	2,10	2,00	1,94	1,90	1,85	1,80	1,73	1,71	1,64
30	2,16	2,09	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,72	1,69	1,62
40	2,07	2,00	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,61	1,59	1,51
60	1,99	1,92	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,50	1,48	1,39
120	1,90	1,83	1,72	1,65	1,60	1,55	1,55	1,49	1,36	1,25
∞	1,83	1,75	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,28	1,24	1,00