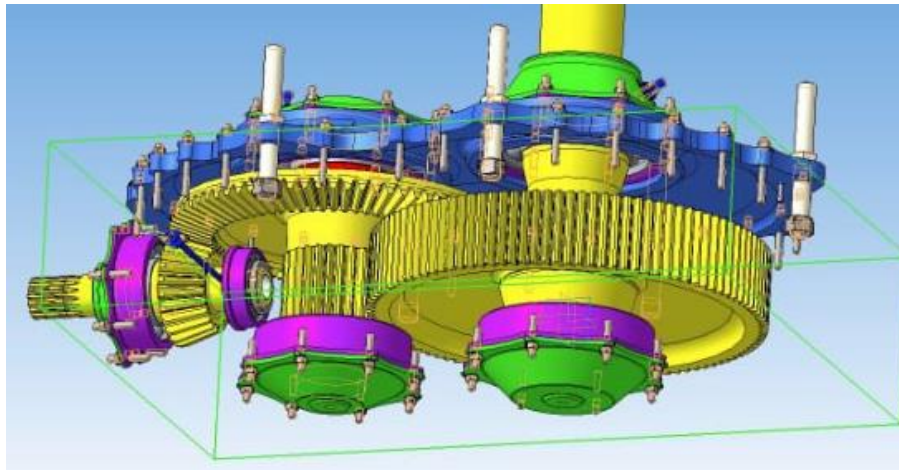


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ МАШИН ТА МЕХАНІЗМІВ



ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмами
«Літаки і вертольоти» та «Інженерія авіаційних та ракетно-космічних систем»
спеціальності «Авіаційна та ракетно-космічна техніка»

Укладач: П. В. Лук'янов

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент

*Мариношенко О.П., к.т.н., доцент,
кафедра КІ, ННІАТ, КПП ім. Ігоря Сікорського*

Відповідальний
редактор

*Сухов В.В., д.т.н., професор,
кафедра АРБ, ННІАТ, КПП ім. Ігоря Сікорського*

*Гриф надано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 30.06.2022р.)
за поданням Вченої ради факультету/навчально-наукового інституту
(протокол № 5 від 22.06.2022 р.)*

Навчальний посібник укладено згідно основних розділів нормативного курсу теорії машин та механізмів, який читається студентам механічних спеціальностей КПП імені Ігоря Сікорського за напрямком 13 - «Механічна інженерія».

Посібник містить 11 практичних робіт за наступними темами: визначення кінематичних пар, рухливості механізму; структурний аналіз механізму; кінематичний аналіз механізму, передатні функції; кінематичний аналіз важільних механізмів методом планів; силовий розрахунок механізмів; синтез зубчастих зачеплень; визначення зведеної сили та моменту сил; визначення моменту інерції маховика; статичне врівноваження механізмів; синтез зубчастої передачі; кінематичний аналіз плоских кулачкових механізмів. Метою перелічених робіт є засвоєння основних теоретичних методів структурного, кінематичного та силового аналізу машин та механізмів. Зокрема, наводяться приклади механізмів, що є складовими частинами авіаційної техніки, розрахунок яких здійснюється на основі методів теорії машин та механізмів.

Структурно кожна практична робота складається з теоретичної частини, прикладів для аудиторної роботи та завдання для самостійної роботи, контрольних питань. Обсяг посібника відповідає навчальним освітнім програмам «Літаки і вертольоти» та «Інженерія авіаційних та ракетно-космічних систем» рівня «бакалавра» за спеціальністю 134 - «Авіаційна та ракетно-космічна техніка».

Реєстр. № НП 21/22-606. Обсяг 6,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПП ім. Ігоря Сікорського, 2022

Зміст

Вступ.....	4
1. Визначення кінематичних пар, рухливості механізму.....	5
2. Структурний аналіз механізму.....	12
3. Кінематичний аналіз механізму, передатні функції.....	19
4. Кінематичний аналіз важільних механізмів методом планів.....	26
5. Силовий розрахунок механізмів	43
6. Синтез зубчастих зачеплень.....	53
7. Визначення зведеної сили та моменту сил.....	63
8. Визначення моменту інерції маховика.....	69
9. Статичне врівноваження механізмів.....	77
10. Синтез зубчастої передачі.....	84
11. Кінематичний аналіз плоских кулачкових механізмів.....	92
12. Список рекомендованої літератури.....	104

Вступ

Практичні заняття з курсу «Теорія машин і механізмів» є базовою частиною навчального плану за спеціальністю «Авіаційна та ракетно-космічна техніка». У даному посібнику наведено основні теми курсу теорії машин та механізмів, які є основою нормативного курсу ТММ та безпосередньо зустрічаються у авіаційній техніці. Наприклад, кулачковий газорозподільчий механізм вертольота, діафрагменого паливного насосу, кривошипно-шатунний повзунковий механізм авіаційного повітряного насосу, зубчастий механізм головного редуктора вертольота, шасі літака, тощо.

Виконання практичних завдань має на меті засвоєння студентами знань з наступних тем:

- класифікації кінематичних пар, ступеня рухливості плоских та просторових механізмів;
- проведення структурного аналізу механізмів: класи, групи, види;
- проведення кінематичного аналізу механізмів: побудова передатних функцій, застосування методу планів;
- силового аналізу механізмів: визначення сил, моментів сил, моментів інерції, статичне врівноваження механізмів;
- конструювання механізмів шляхом синтезу за вказаними властивостями: синтез зубчастих зачеплень, синтез зубчастої передачі;
- виконання аналізу плоских кулачкових механізмів.

За для досягнення вказаної мети, можливості самостійного вивчення матеріалу курсу, на прикінці посібника наводиться список використаних першоджерел, а також література, якою можна скористатись для розширеного вивчення даного курсу.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №1

Визначення кінематичних пар, рухливості механізму

Мета роботи: навчитись визначати кінематичні пари, ступінь рухливості механізму.

Теоретичний матеріал

1.1 Основні поняття

Ланка – елементарна складова частина механізму.

Види ланок:

- **вхідна ланка** - ланка якій надається рух, який перетворюється механізмом у потрібний рух інших ланок ;
- **вихідна ланка** – ланка, яка здійснює функціональний рух механізму, для якого він призначений;

Решта ланок – *проміжні ланки*, або з'єднуючі ланки:

- **стояк** – нерухома ланка механізму;
- **кривошип** – ланка, яка здійснює повний оберт за цикл руху механізму;
- **шатун** – ланка, яка виконує плоско-паралельний рух;
- **повзун** – ланка, що здійснює поступальний рух вздовж прямої лінії;
- **куліса** – рухома напрямляюча для повзуна;
- **камінь куліси** – повзун, який рухається вздовж куліси;
- **початкова ланка** - ланка, з якою зв'язують узагальнену координату.

Кінематична пара - це рухоме з'єднання двох ланок між собою, що обмежує їх відносні рухи. Клас кінематичної пари визначається кількістю умов зв'язку, що накладає пара на відносний рух ланок при їх з'єднанні.

Умова зв'язку – умова, що обмежує відносний рух. З теоретичної механіки відомо, що вільне тіло, у нашому випадку ланка, має шість ступенів вільності - можливих

незалежних рухів. З'єднання двох ланок у кінематичну пару зменшує кількість рухів від 1 до 5. У зв'язку з цим І.І.Артоболевський запропонував усі пари розділити на п'ять класів.

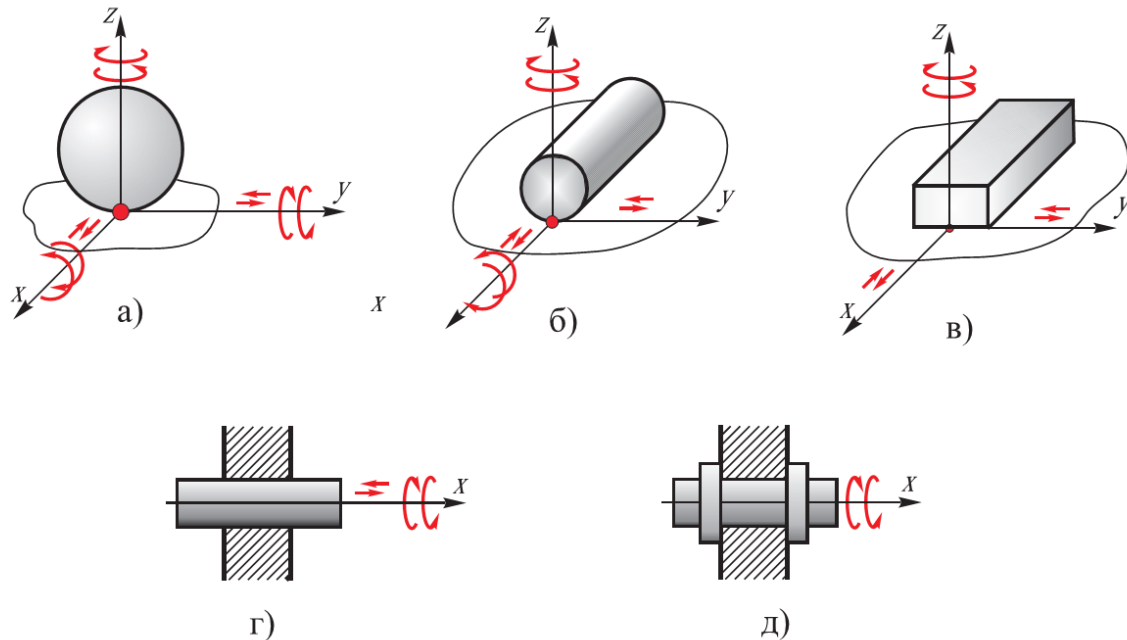


Рис.1.1 Приклади кінематичних пар: а – 1-го класу; б – 2-го класу; в – 3-го класу;

г – 4-го класу; д – 5-го класу

1.2 Число ступенів вільності механізму.

Кожна ланка поза кінематичним ланцюгом має шість ступенів свободи. Якщо механізм складається з m ланок, то загальний ступінь вільності його дорівнює $6m$, що співпадає з кількістю узагальнених координат.

Якщо нерухому систему координат зв'язати з однією з ланок, то *ступінь рухливості кінематичного ланцюга* визначається відносно цієї ланки. Зазвичай цю систему координат пов'язують з нерухомою ланкою - стояком, а *ступінь рухливості механізму визначають відносно стояка*.

Для геометричних в'язей ступінь рухливості можна визначити за різницею між загальним числом узагальнених координат рухомих ланок та числом рівнянь в'язей, якщо ці рівняння незалежні, тобто жодне з них не можна отримати як наслідок інших.

Позначимо $5p_5$ - кількість обмежень, що накладаються на ланки механізму парами 5-го класу (p_5 парами число пар 5 класу), $4p_4$ - число обмежень, накладених парами 4 класу (p_4 - число пар 4-го класу) і т.д.

Можлива кількість узагальнених координат – $6n$, де $n = m - 1$ кількість рухомих ланок механізму. Тоді ступінь рухливості механізму можна знайти за формулою Сомова-Малишева:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (1.1)$$

Плоске тіло має тільки три незалежні рухи: поступальний рух уздовж двох координатних осей і обертальний – навколо третьої. З'єднанні у кінематичну пару плоскі механізми мають лише один або два відносні рухи. Отже, в плоский механізм утворює пари тільки *четвертого* та *п'ятого* класів. Пари п'ятого класу є *обертальними* або *поступальні*. Формула (1.1) набуде наступного вигляду (формула П.Л.Чебишева):

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (1.2)$$

1.3. Приклади визначення кінематичних пар, рухливості механізму

Приклад 1.

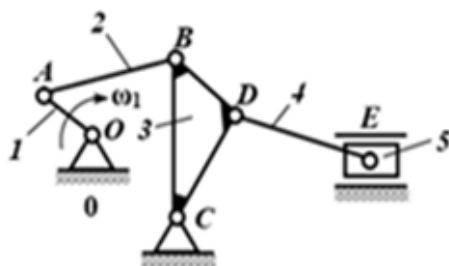


Рис.1.2 0-стояк;1-кривошип;2-шатун;3-коромисло;4-шатун;5-повзун.

Кількість кінематичних ланок $n=5$.

Кінематичні пари в шарнірах: $0 - 0-1$; $A - 1-2$; $B - 2-3$; $C - 0-3$, $D - 3-4$, $E - 4-5$, $E' - 5-0$.

Кількість кінематичних пар 5-класу $p_1 = 7$. Всі кінематичні пари нижчі. Ступінь рухливості механізму $w = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$.

Приклад 2. Кінематичні пари (рис.1.3) в шарнірах: $O - 0-1$; $A - 1-2$, $B - 2-3$, $O_1 - 3-0$; $C - 3-4$; $D - 4-5$; $O_2 - 5-0$. Всі кінематичні пари 5-класу, $p_1 = 7$. Тому рухливість $w = 1$.

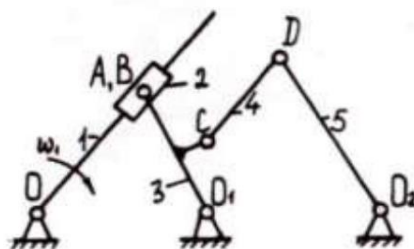


Рис.1.3 Визначення ступеню рухливості механізму.

1.3 Завдання для самостійної роботи

Визначити кількість та тип кінематичних пар, рухливість механізмів зображених на рисунках. Вказати дані пари, скласти таблицю.

Таблиця 1.1 Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант	Варіант	Варіант	Варіант	Варіант
№1-рис.1.4	№5-рис.1.8	№9-рис.1.12	№13-рис.1.16	№17-рис.1.20
№2-рис.1.5	№6-рис.1.9	№10-рис.1.13	№14-рис.1.17	№18-рис.1.21
№3-рис.1.6	№7-рис.1.10	№11-рис.1.14	№15-рис.1.18	№19-рис.1.22
№4-рис.1.7	№8-рис.1.11	№12-рис.1.15	№16-рис.1.19	№20-рис.1.23

Рисунки 1.14-1.20 - Визначення ступеню рухливості механізму

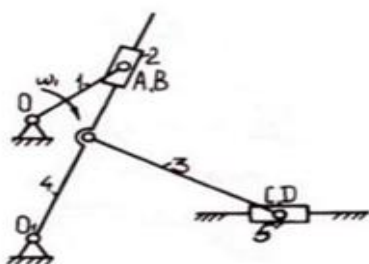


Рис.1.4

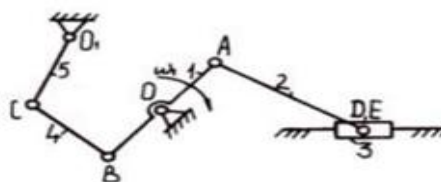


Рис.1.5

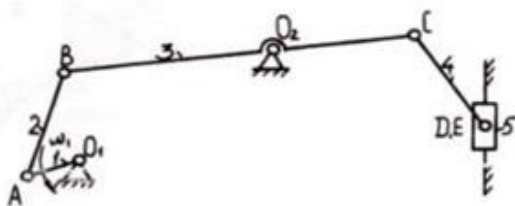


Рис.1.6

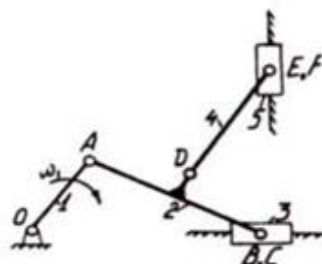


Рис.1.7

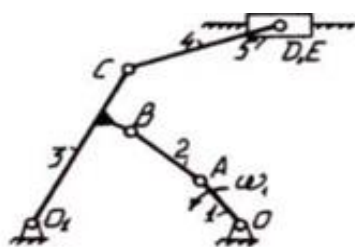


Рис.1.8

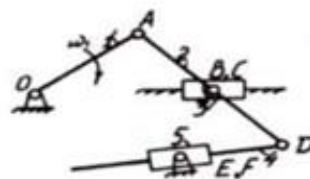


Рис.1.9

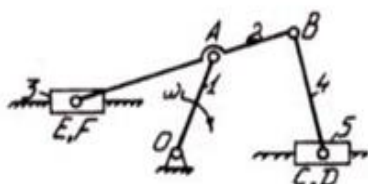


Рис.1.10

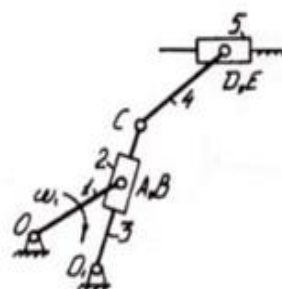


Рис.1.11

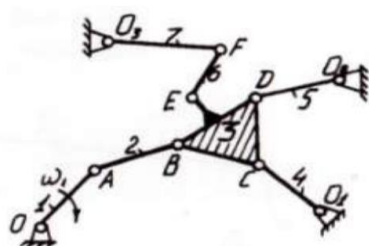


Рис.1.12

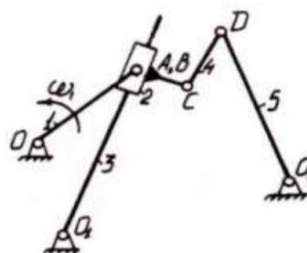


Рис.1.13

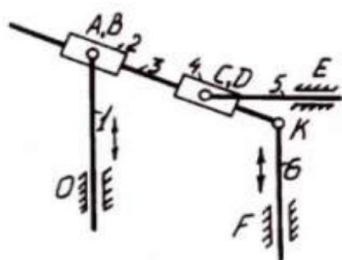


Рис.1.14

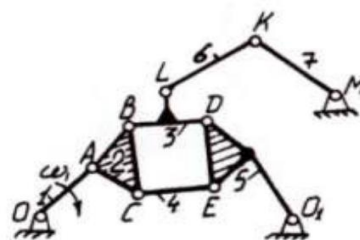


Рис.1.15

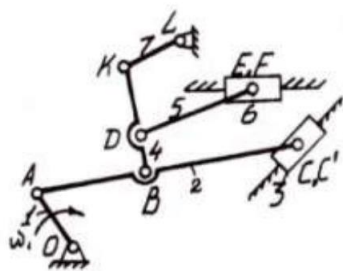


Рис.1.16

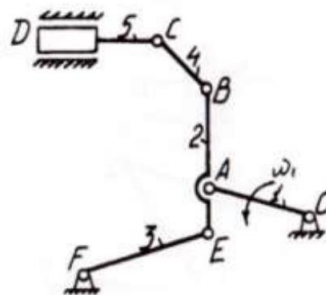


Рис.1.17

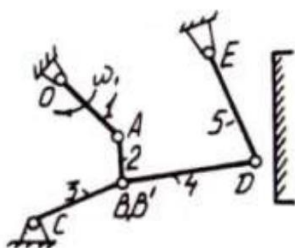


Рис.1.18

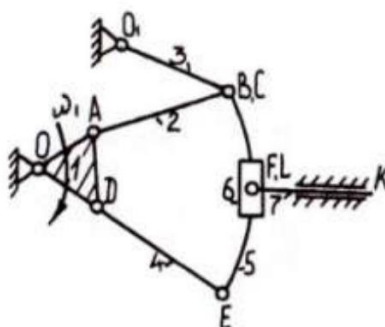


Рис.1.19

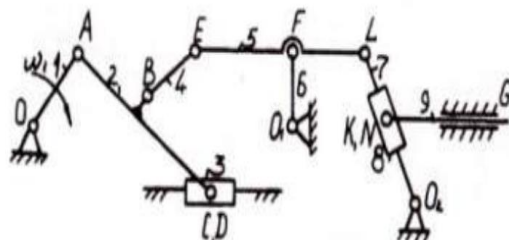


Рис. 1.20

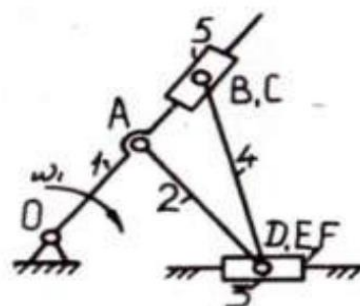


Рис. 1.21

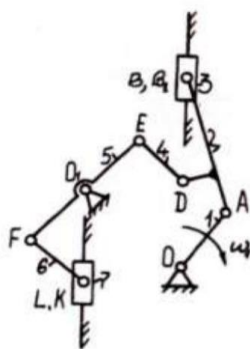


Рис. 1.22

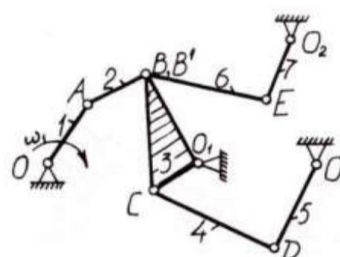


Рис. 1.23

Контрольні запитання

1. Що таке ланка, які існують типи ланок?
2. Які існують різновиди ланок за функціональним призначенням?
3. Що називають кінематичною парою?
4. Класи та типи (вища,нижча) кінематичних пар.
5. Формула визначення рухливості механізму, загальний випадок та випадок плоского механізму.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №2

Структурний аналіз механізмів

Мета роботи: навчитись будувати структурні схеми механізмів, виконувати структурний аналіз згідно класифікації Ассура.

2.1 Теоретичний матеріал

Структурним синтезом механізму називається створення структурної схеми даного механізму.

Структурний синтез механізму базується на методі, запропонованому В. Ассуром. Ідея методу полягає у наступному: кожен механізм розглядається як ланцюг, який утворюється шляхом поєднання між собою структурних груп Ассура. Увесь механізм приєднується до найпростішого початкового механізму. Найпростішим початковим механізмом є той механізм, подальше розчленовування якого може неможливе, оскільки змінює функціональне призначення механізму.

Структурною групою або групою Ассура називається відкритий кінематичний ланцюг, ступінь вільності відносно елементів зовнішніх кінематичних пар дорівнює нулю. Це є головною умовою групи, що дозволяє зберігти (не змінювати) ступінь рухливості механізму в цілому. Група Ассура не повинна розпадатись на простіші групи.

Для того, щоб ступінь рухливості механізму в цілому не змінилась, для кожної з приєднаної структурної групи повинна виконуватись умова:

$$w = 3n - 2p = 0 . \quad (2.1)$$

Аналіз формули (2.1) вказує на те, що найпростіша група Ассура складається із двох ланок і трьох шарнірів (рис.2.1):

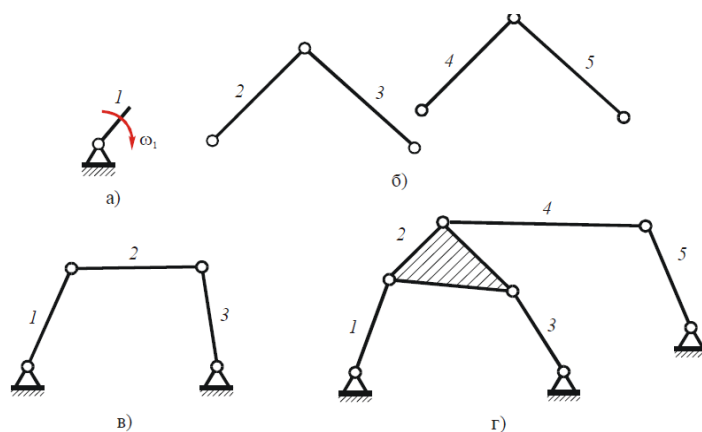


Рис.2.1 Структурний аналіз механізму

Легко переконатися, що синтезовані механізми відповідають поставленій умові – це шестиланкові механізми з $w = 1$.

Класифікація за Ассуром. До груп I-го і II-го класів відносяться такі механізми, які не містять змінних контурів. При цьому, групи II-го класу включають базисні ланки, які з'єднані тільки з іншими базисними ланками (рис. 2.2), групи III-го класу містять один змінний контур; групи IV-го класу – два змінних контури і т.д.

Порядок групи визначається числом повідків (див. табл.2.1 і рис. 2.17)

Класифікація за Артоболевським:

- клас групи визначається кількістю шарнірів в найскладнішому замкненому контурі;
- порядок групи визначається кількістю шарнірів, якими група приєднується до механізму.

Таблиця 2.1 Класифікація механізмів

Вид групи	Класифікація	
	За Ассуром	За Артоболевським
	I-й клас 2-й порядок	II-й клас 2-й порядок
	I-й клас 3-й порядок	III-й клас 3-й порядок
	I-й клас 4-й порядок	III-й клас 4-й порядок
	III-й клас 0-й порядок	IV-й клас 2-й порядок

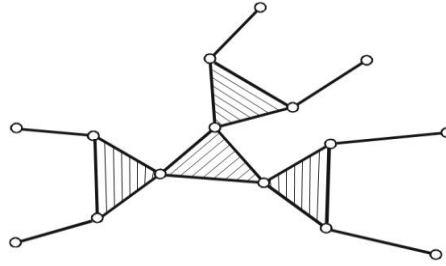


Рис.2.2 Структурна група III класу 6-го порядку

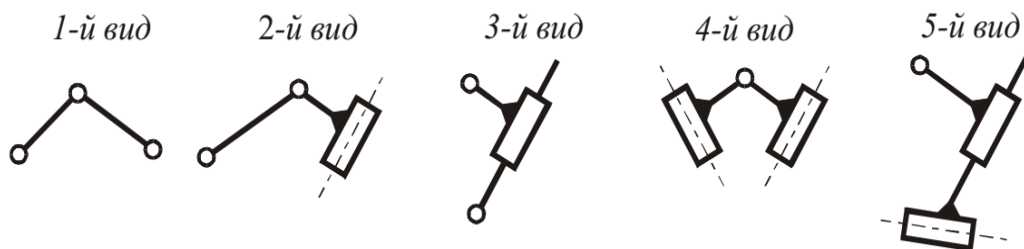


Рис. 2.3 Структурні групи II-го класу 2-го порядку за Артоболовським

Нижче наводяться приклади груп Ассура.

2.2 Схема структурного аналізу механізмів

Основною задачею *структурного аналізу механізмів* є визначення його класу і порядку.

Клас і порядок механізму визначається **класом і порядком** найскладнішої групи Ассура, яка входить до його складу.

Структурний аналіз проводиться в порядку, оберненому до синтезу:

- для заданого механізму потрібно побудувати структурну схему;
- виділити початковий механізм;
- розчленувати ланцюг, що залишився, на структурні групи Ассура.

Побудова структурної схеми. Структурна схема будується за заданою кінематичною схемою в такій послідовності:

- 1) Виявляються пасивні ланки і в'язі, які видаляються зі схеми механізму.
- 2) Усі вищі пари замінюються нижчими. Для цього в центрі кривини елементів вищих кінематичних пар у точці їх дотику поміщають шарніри *A*

і B (рис.2.4). З'єднують їх ланкою AB , вісь якої збігається зі спільною нормаллю в точці дотику C . Їх також з'єднують з шарнірами O і O_1 ланками OA і O_1B . Отриманий механізм є *кінематично еквівалентним* до вихідного з вищою парою. Швидкості та прискорення його точок і відповідних точок вихідного механізму однакові, що нескладно показати (див.[1]). Отриманий кінематично еквівалентний до вихідного механізм називається *замінним механізмом*.

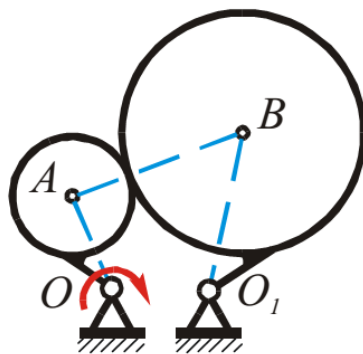


Рис.2.4 Кінематично еквівалентні механізми

3) Усі поступальні пари замінюються на обертальні. При цьому поступальний рух повзуна розглядають як миттєвий обертальний відносно точки, що знаходиться на нескінченності, а сам повзун розглядають як поводок нескінченної довжини (рис.2.5).



Рис.2.5 Заміна поступальної пари на обертальну

4) Ланки, які утворюють три і більше кінематичні пари, зображають у вигляді многогранників з кількістю вершин, що дорівнює кількості шарнірів. За цим самим принципом зображають і стояк.

2.3 Приклади на структурний аналіз плоских механізмів

Приклад 1. Визначити ступінь вільності механізму (рис.2.6). Розкласти цей механізм на групи Ассура, записати формулу його будови та вказати клас механізму.

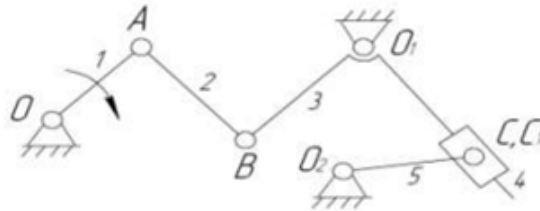


Рис.2.6 Структурний аналіз 5-ти ланкового механізму

Рішення

1. Визначаємо ступінь вільності плоского важільного механізму:

$$n = 5, P_5 = 7, P_4 = 0, w = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

2. Розкладемо механізм на групи Ассура.

Таблиця 2.2 Приклади груп Ассура

Назва	Позначення
Механізм I-го класу	
Група Ассура II-го класу 2-го порядку, $II_2(1,2)$	
Група Ассура III-го класу 3-го порядку, $III_3(2.1,3,4)$	
Група Ассура III-го класу 6-го порядку, $III_3(2.3.6.8.1,4,5,7,9,10)$	
Група Ассура IV-го класу 2-го порядку, $IV_2(2.3.1,4)(a)$ і 3-го порядку $IV_3(1.2.3,4,5,6)$ (б)	
Група Ассура V-го класу 3-го порядку $V_3(2.3.4.1,5,6)$	

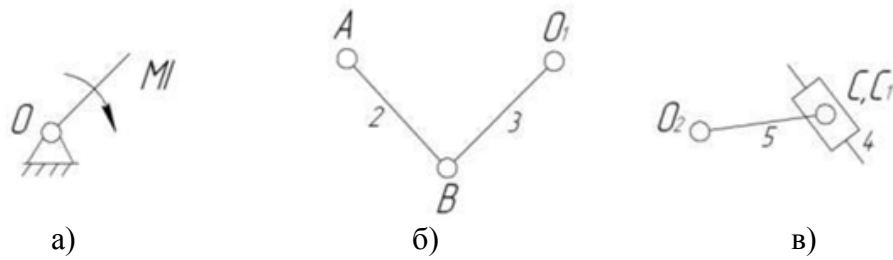


Рис.2.7 а) 1-клас; б) 2клас, 2 пор., 1 вид; в) 2клас, 2 пор., 2 вид

3. Форма будови механізму

$$I_{(0,1)} \rightarrow 2 \frac{1}{(2,3)} \rightarrow 2 \frac{2}{(4,5)}.$$

4. Клас механізму.

Даний механізм містить 2 групи Ассурі 2 класу, тому даний шести ланковий механізм є механізмом 2 класу.

Приклад 2. Визначити ступінь вільності механізму (рис.2.8). Розкласти цей механізм на групи Ассурі, записати формулу його будови та вказати клас механізму.

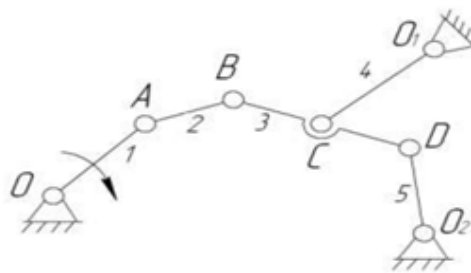


Рис.2.8 Структурний аналіз механізму.

1. Визначаємо ступінь вільності плоского важільного механізму:

$$n = 5, p_5 = 7, p_4 = 0, w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

2. Розкладаємо на групи Ассурі:

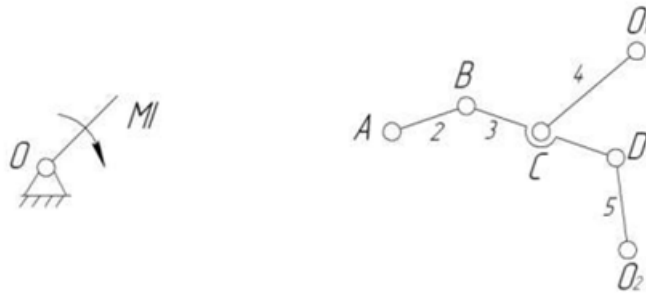


Рис.2.9: Механізм 1 класу

Група Ассура 3 класу 3 порядку

3. Формула будови механізму:

$$I_{(0,1)} \rightarrow 3 \frac{1}{(2,[3],4,5)},$$

де [3]- базисна ланка.

4. Клас механізму.

Даний механізм є механізмом третього класу.

2.3 Завдання для самостійної роботи

Розкласти механізми на групи Ассура, виконати аналіз .

Таблиця 2.3 Завдання для самостійної роботи

Варіант	Варіант	Варіант	Варіант	Варіант
№1-рис.1.4	№5-рис.1.8	№9-рис.1.12	№13-рис.1.16	№17-рис.1.20
№2-рис.1.5	№6-рис.1.9	№10-рис.1.13	№14-рис.1.17	№18-рис.1.21
№3-рис.1.6	№7-рис.1.10	№11-рис.1.14	№15-рис.1.18	№19-рис.1.22
№4-рис.1.7	№8-рис.1.11	№12-рис.1.15	№16-рис.1.19	№20-рис.1.23

2.4 Контрольні запитання

1. Що таке структурна група Ассура?
2. Клас, порядок, вид групи Ассура.
3. Заміна вищих кінематичних пар на нижчі.
4. Схема структурного аналізу.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №3

Кінематичний аналіз механізму: передаточні функції та передаточні відношення

Мета роботи: навчитись знаходити передатні функції та передатні відношення механізмів.

Теоретична частина

3.1 Кінематичні характеристики механізму

До кінематичних характеристик або параметрів механізму належать: координати та траєкторії руху точок; узагальнені координати ланок; переміщення точок і ланок, їх швидкості і прискорення, а також *функції положення і передатні функції механізму*.

3.2 Передатні функції та передатні відношення

Функція положення механізму. На практиці дослідження кінематичних характеристик зручно проводити не в функції часу, а в функції узагальнених координат початкових ланок. Тобто, коли відоме положення механізму, обчислюють ці характеристики незалежно від закону зміни узагальнених координат в часі, який може бути і невідомим. Іншими словами, кінематичні характеристики механізму в цьому випадку залежать лише від кінематичної схеми і не залежать від часу.

Залежність координати вихідної ланки механізму від узагальнених координат механізму називають *функцією положення механізму*.

Нехай механізм має S узагальнених координат $\varphi_1, \dots, \varphi_s$, а ланка з індексом n - вихідна ланка. Тоді функція положення запишеться у вигляді:

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_s). \quad (3.1)$$

Розглянемо механізм з двома ступенями рухливості $w=2$ (рис. 3.1), ланка n якого виконує обертальний рух з кутовою швидкістю ω_n .

Функція положення ланки n :

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \varphi_2). \quad (3.2)$$

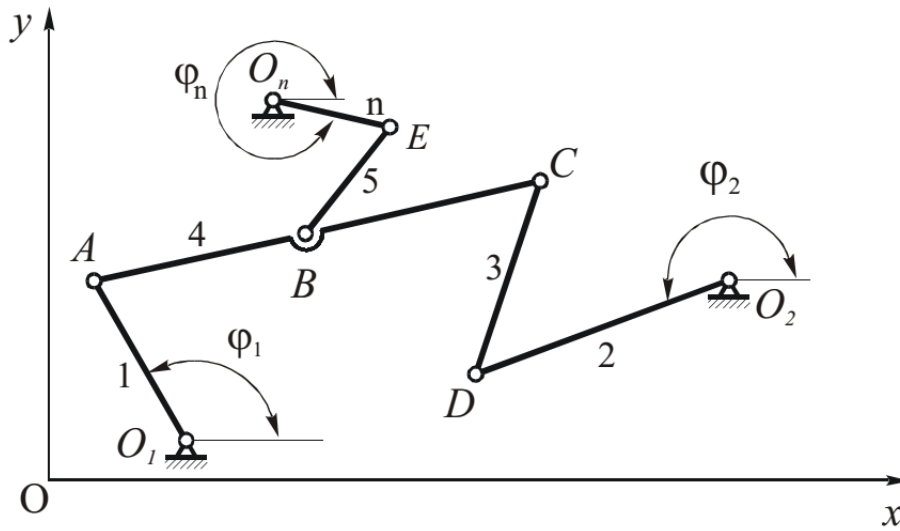


Рис.3.1 Шарнірно-важільний механізм з $w=2$

Передатні функції механізму. Запишемо вираз для кутової швидкості ланки n (рис. 3.1).

$$\omega_n = \frac{d\varphi_n}{dt} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad (3.3)$$

Введемо позначення *частинних передатних відношень*:

$$u_{n1}^{(2)} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi_1}, u_{n2}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi_2} \quad (3.4)$$

Тоді (3.3) з урахуванням (3.4) запишеться:

$$\omega_n = u_{n1}^{(2)} \cdot \omega_1 + u_{n2}^{(1)} \cdot \omega_2 \quad (3.5)$$

Фізичний зміст частинних передатних відношень такий: $u_{n1}^{(2)}$ - це передатне відношення між ланками n і 1 за нерухомої ланки 2 (рис.3.1); $u_{n2}^{(1)}$ - це передатне відношення між ланками n і 2 за нерухомої ланки 1. Частинне передатне відношення називають також *аналогом кутової швидкості*.

Визначимо швидкість точки E (рис. 3.1), положення якої визначається радіус – вектором $\vec{r}_E = \vec{r}_E(\varphi_1, \varphi_2)$

$$\vec{V}_E = \frac{d\vec{r}_E}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_E}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_E}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} \quad (3.6)$$

Враховуючи означення кутової швидкості, маємо:

$$\vec{V}_E = \frac{d\vec{r}_E}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_E}{\partial \varphi_1} \cdot \omega_1 + \frac{\partial \vec{r}_E}{\partial \varphi_2} \cdot \omega_2, \quad (3.7)$$

де $\frac{\partial \vec{r}_E}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \vec{r}_E}{\partial \varphi_2}$ - *аналогі швидкостей точки E*.

Для механізму зі ступенем рухливості $w=1$ ($\omega_2=0$) маємо:

$$\vec{V}_E = \frac{d\vec{r}_E}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 \quad (3.8)$$

Визначимо кутове прискорення ланки n .

$$\varepsilon_n = \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} \omega_1 \right) = \frac{d^2 \varphi_n}{d\varphi_1^2} \frac{d\varphi_1}{dt} \omega_1 + \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} \frac{d\omega_1}{dt} \quad (3.9)$$

або

$$\varepsilon_n = \frac{d^2 \varphi_n}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} \varepsilon_1 \quad (3.10).$$

В рівнянні (3.10) $\frac{d^2 \varphi_n}{d\varphi_1^2} = u'_{n1}$ - *аналог кутового прискорення*.

Визначимо тангенціальне прискорення т. E , взявши похідну по часу від швидкості (3.8). Після елементарних перетворень отримаємо вираз:

$$\vec{a}_E^\tau = \frac{d^2 \vec{r}_E}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{d\vec{r}_E}{d\varphi_1} \varepsilon_1 \quad (3.11)$$

У виразі (3.11) $\frac{d^2 \vec{r}_E}{d\varphi_1^2}$ - *аналог тангенціального прискорення точки E*.

Аналоги швидкостей і прискорень називають *передатними функціями механізму*.

3.3 Приклад розрахунку

Знайти передатні функції кривошипно-шатунного механізму (рис.3.2):

швидкість і прискорення повзуна B в масштабі μ_l , якщо $\omega_1 = const$;

Визначити передатне відношення шатуна і кривошипа, а також кутове прискорення шатуна. Визначимо функцію положення точки B :

$$x_B = x_B(\varphi_1)$$

$$x_B = l_{OA} \cos \varphi_1 + l_{AB} \cos \psi \quad (3.12)$$

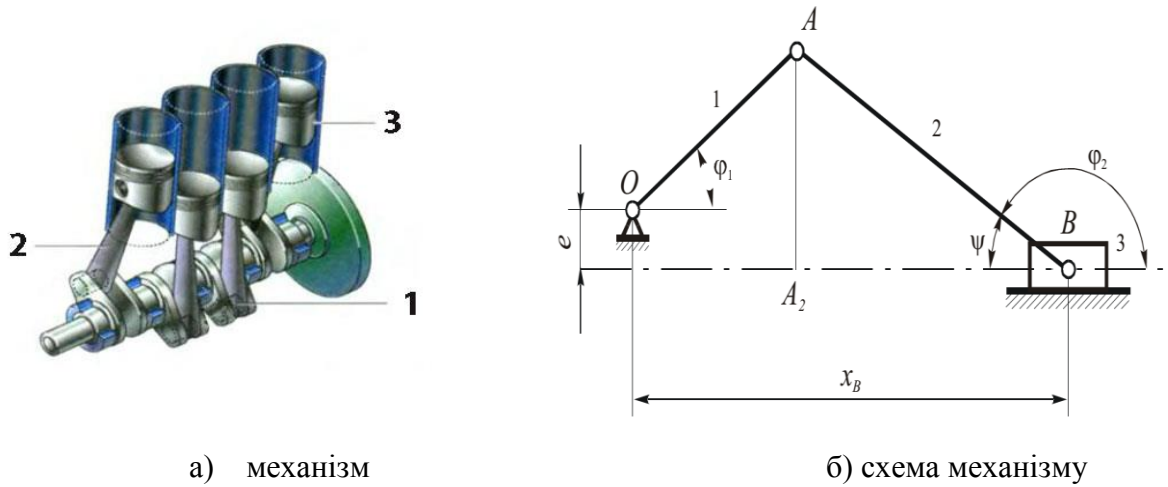


Рис.3.2 Кривошипно-шатунний повзунковий механізм авіаційного двигуна:

1- кривошип; 2- шатун; 3 – повзун.

З $\triangle ABA_1$ знаходимо:

$$\sin \psi = \frac{l_{OA} \sin \varphi_1 + e}{l_{AB}} = \sin(\pi - \varphi_2).$$

Відповідно маємо

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{l_{OA} \sin \varphi_1 + e}{l_{AB}} \right)^2}$$

Підставляючи знайдений вираз в (3.12), отримаємо:

$$x_B = l_{OA} \cos \varphi_1 + \sqrt{l_{AB}^2 - (e + l_{OA} \sin \varphi_1)^2}.$$

Швидкість точки B

$$V_B = \frac{dx_B}{dt} = \frac{dx_B}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

Аналог швидкості точки B знайдемо наступним чином:

$$\frac{dx_B}{d\varphi_1} = -l_{OA} \cdot \sin \varphi_1 + \frac{-2(e + l_{OA} \cdot \sin \varphi_1) l_{OA} \cdot \cos \varphi_1}{2\sqrt{l_{AB}^2 - (e + l_{OA} \sin \varphi_1)^2}}$$

Враховуючи, що при $\omega_1 = \text{const}$ кутове прискорення $\varepsilon_1 = 0$, прискорення точки B згідно (3.11).

$$a_B = \frac{d^2 x_B}{dt^2} = \frac{d^2 x_B}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2$$

Аналог прискорення

$$\frac{d^2 x_B}{d\varphi_1^2} = -l_{OA} \cos \varphi_1 - \frac{(l_{AB} l_{OA} \cos \varphi_1)^2 - l_{AB}^2 l_{OA} (e + l_{OA} \sin \varphi_1) \sin \varphi_1 + l_{OA} (e + l_{OA} \sin \varphi_1)^3 \sin \varphi_1}{[l_{AB}^2 - (e + l_{OA} \sin \varphi_1)]^{3/2}}$$

Передатне відношення шатуна та кривошипа матиме вигляд:

$$u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{d}{d\varphi_1} \left(\arcsin \frac{l_{OA} \sin \varphi_1 + e}{l_{AB}} \right) = \frac{l_{OA} \cos \varphi_1}{l_{AB} \sqrt{1 - \left(\frac{l_{OA} \sin \varphi_1 + e}{l_{AB}} \right)^2}} = -\frac{l_{OA} \cos \varphi_1}{l_{AB} \cos \varphi_2},$$

$$\text{де } \sqrt{1 - \left(\frac{l_{OA} \sin \varphi_1 + e}{l_{AB}} \right)^2} = \cos(\pi - \varphi_2) = -\cos \varphi_2.$$

Визначимо передатну функцію кутового прискорення шатуна:

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d}{d\varphi_1} (u_{21}) = \frac{d}{d\varphi_1} \left(-\frac{l_{OA} \cos \varphi_1}{l_{AB} \cos \varphi_2} \right) = \frac{l_{OA}}{l_{AB}} \cdot \left(\frac{\cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 - u_{21} \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} \right).$$

Кутове прискорення шатуна:

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \frac{l_{OA}}{l_{AB}} \cdot \left(\frac{\cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 - u_{21} \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} \right)$$

3.4 Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати передаточні функції та передаточні відношення, аналоги кутових та лінійних швидкостей для механізму, наведеному на рис.3.3,3.4

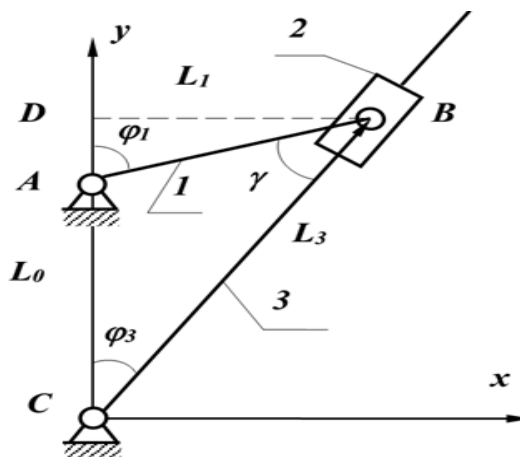


Рис.3.3 Передаточні функції та передаточні відношення.

2. Згідно числових даних варіантів 1-20, наведених у таблиці 3.1, для задачі рис.3.4, виконати числовий розрахунок аналогів: швидкості, прискорення, кутової швидкості, кутового прискорення.

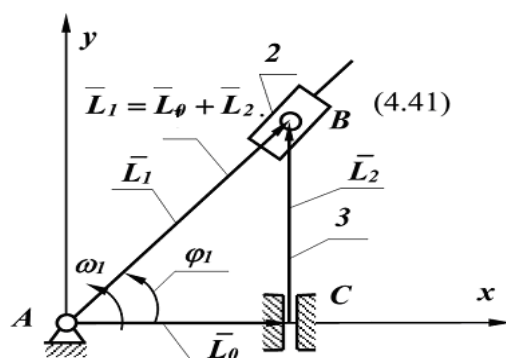


Рис.3.4 До задачі 2.

Таблиця 3.1 Варіанти завдань для самостійної роботи

№ Варіанту (1-20)	Лінійні розміри ланки, L_1	Кути, $\varphi_1, \varphi_3, \gamma$	Кутова швидкість, рад/с
1	1м	80°, 40°, 30°	50
2	0,8м	75°, 45°, 35°	60
3	0,9м	75°, 40°, 30°	70
4	1м	77°, 43°, 35°	80
5	0,7м	79°, 45°, 30°	55
6	0,85м	81°, 44°, 40°	65
7	0,95м	79°, 43°, 45°	75
8	1м	80°, 42°, 47°	85
9	0,75м	81°, 43°, 45°	95
10	0,95м	75°, 42°, 44°	90
11	0,7м	77°, 40°, 41°	85
12	0,85м	83°, 42°, 40°	70
13	0,95м	81°, 42°, 44°	85
14	1м	80°, 42°, 47°	65
15	0,75м	81°, 43°, 45°	75
16	0,95м	79°, 43°, 45°	95
17	0,8м	80°, 42°, 47°	85
18	0,85м	79°, 45°, 30°	100
19	1м	81°, 44°, 40°	85
20	0,75м	81°, 42°, 44°	95

3.5 Контрольні запитання

1. Що є кінематичними характеристиками механізму?

2. Передаточні функції та передаточні відношення.
3. Частинні передаточні відношення.
4. Аналог швидкості, прискорення, кутової швидкості, кутового прискорення.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №4

Кінематичний аналіз механізмів методом планів

Мета роботи: засвоїти метод планів швидкостей та прискорень.

Теоретична частина

4.1 Плани механізму

Зображення кінематичної схеми механізму у вибраному масштабі, яке відповідає заданому положенню початкової ланки, називається *планом механізму*. Таким чином, плани механізму будують під час проведення кінематичного аналізу, наприклад методом діаграм.

4.2 Плани швидкостей і прискорень

Планом швидкостей механізму називається креслення, на якому зображені у вигляді відрізків вектори, однакові за модулем і напрямком зі швидкостями різних точок ланок механізму в даний момент часу.

План швидкостей механізму є сукупністю кількох планів швидкостей для окремих його ланок, у яких полюси планів p є загальною точкою – полюсом плану швидкостей механізму.

Креслення, на якому зображені у вигляді відрізків вектори, однакові за модулем і напрямком з прискореннями різних точок ланок механізму в даний момент часу, називається *планом прискорення механізму*.

В методі планів швидкостей і прискорень використовуються теореми про складний рух твердого тіла (ланки), який можна представити як суму переносного і відносного рухів.

Нехай тіло (рис. 4.1) виконує плоско-паралельний рух. Відомо, що рух тіла можна описати, задаючи закон руху двох його точок, наприклад A і B .

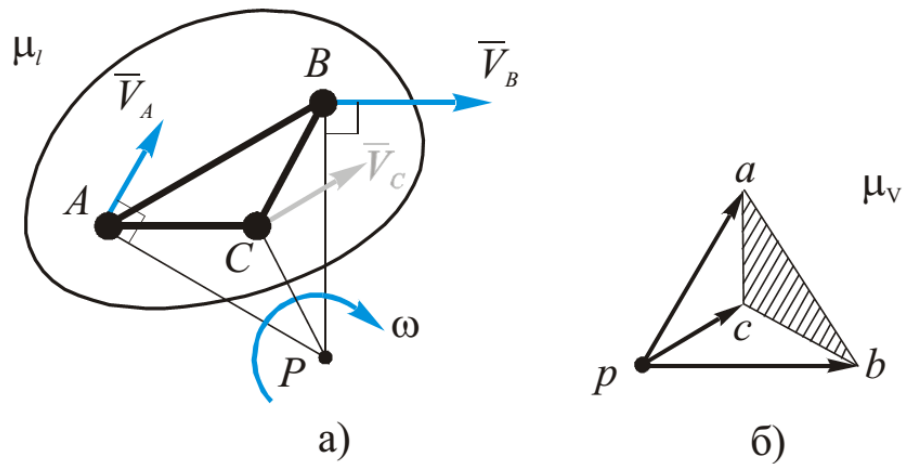


Рис.4.1 План швидкостей твердого тіла: а) тверде тіло; б) план швидкостей

Під час руху у будь-який момент часу можна визначити точку, жорстко зв'язану з тілом, швидкість якої дорівнює нулю. Це миттєвий центр обертання (МЦО) тіла P . Якщо тіло рухається поступально, то МЦО лежить на нескінченності. Відносно цієї точки в даний момент часу тіло робить обертальний рух зі швидкістю ω . В інший момент часу ця швидкість може бути іншою. Перенесемо вектори абсолютних швидкостей \vec{V}_A, \vec{V}_B в точку p (полнос плану швидкостей). Отримаємо план швидкості відрізка AB (рис. 4.1 б) в масштабі:

$$\mu_v = \frac{\vec{V}_A}{pa} = \frac{\vec{V}_B}{pb}, [\text{м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}]$$

Швидкість точки C на підставі теореми про складний рух може бути представлена одним з можливих виразів:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB},$$

або

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA}.$$

Якщо ця швидкість нам теж відома, тоді відрізок на плані

$$p_c = \frac{\vec{V}_c}{\mu_c}.$$

Якщо врахувати зв'язок лінійних та кутових швидкостей, отримаємо:

$$V_A = \omega \cdot PA, V_B = \omega \cdot PB, V_C = \omega \cdot PC.$$

$$\mu_v = \frac{\omega \cdot PA}{pa} = \frac{\omega \cdot PB}{pb} = \frac{\omega \cdot PC}{pc},$$

або

$$\frac{PA}{pa} = \frac{PB}{pb} = \frac{PC}{pc}. \quad (4.1)$$

Вираз (4.1) є математичним формулюванням теореми про подібність плану швидкостей: *кінці векторів абсолютних швидкостей, з'єднані між собою, утворюють фігуру, подібну до ланки, споріднено з нею розташовану і повернуту на 90°*. У споріднено розташованих фігурах напрямки обходу по індексах збігаються.

4.3 Властивості планів швидкостей:

1. Вектори, які виходять з полюса, являють собою абсолютні швидкості.
2. Напрямок вектора — завжди від полюса.
3. В кінці вектора завжди точка, що відповідає точці ланки або кінематичній парі.
4. Вектори на планах швидкостей, що не проходять через полюс, являють собою відносні швидкості.
5. Напрямок відносних швидкостей на плані завжди від другого індексу у позначеннях цих швидкостей до першого.

Розглянемо тіло (рис.4.2), рух якого заданий рухом точок А і В. П – миттєвий центр прискорень (МЦП).

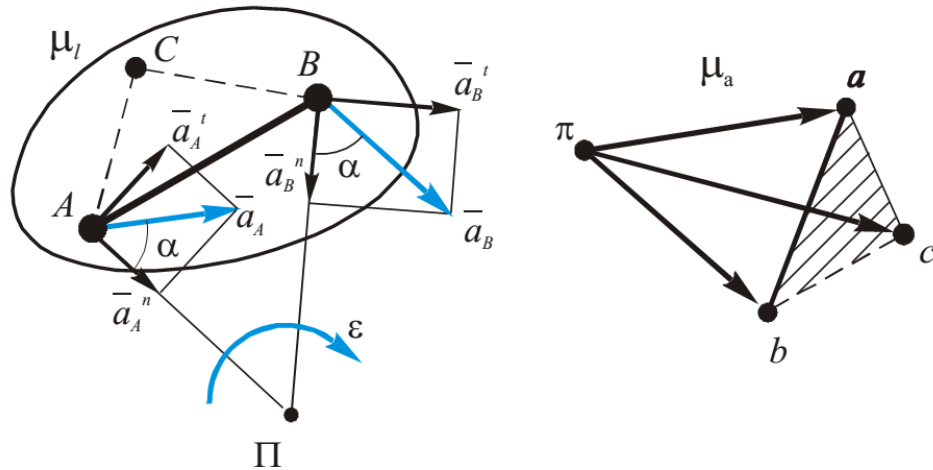


Рис.4.2 План прискорень твердого тіла

Прискорення точки А

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}$$

Тут $a_A^n = \omega^2 PA$ - нормальне прискорення; $a_A^\tau = \epsilon PA$ - тангенціальне прискорення.

Тоді

$$a_A = PA \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}.$$

Прискорення точки В тоді :

$$a_B = PB \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}.$$

Використовуючи співвідношення:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_A^\tau}{a_A^n} = \frac{a_B^\tau}{a_B^n} = \frac{\epsilon PA}{\omega^2 PA} = \frac{\epsilon PB}{\omega^2 PB}$$

Остаточно отримаємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2}.$$

Будуємо план прискорень, переносячи в спільний полюс плану π початки векторів повних прискорень (рис. 4.2 б). Масштабний коефіцієнт плану прискорень:

$$\mu_A = \frac{a_A}{\pi a} = \frac{a_B}{\pi b}, [\text{м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм}]$$

Таким чином, можемо сформулювати теорему про подібність для планів прискорень:

Кінці векторів повних прискорень, з'єднані між собою, утворюють фігуру, подібну до ланки, споріднено з нею розташовану і повернуту на

$$\angle(180^\circ - \alpha), \alpha = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Прискорення точки C можна знайти за теоремою про подібність, згідно з якою $\triangle ABC \sim \triangle abc$ (рис.4.2).

4.4 Властивості планів прискорень. Властивості планів прискорень аналогічні до властивостей планів швидкостей.

4.5 Приклади побудови планів швидкостей та прискорень

Приклад 1. Визначити лінійні швидкість і прискорення точки B повзуна 3 сінного пресу (рис.4.3), та кутову швидкість ω_{AB} , кутове прискорення ε_{AB} шатуна AB . Дано: $l_{OA} = 0,025 \text{ м}$, $l_{AB} = 4 \cdot l_{OA}$; $\omega_1 = 5 \cdot \text{с}^{-1}$, $\alpha = 45^\circ$.

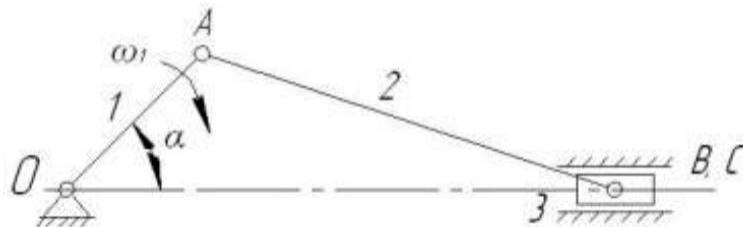


Рис.4.3 Механізм пресу

Рішення. В масштабі $\mu = 0,001 \text{ м/мм}$ будуємо план положення механізму для $\alpha = 45^\circ$, при цьому $l_{OA} = 0,025 \text{ м}$, $l_{AB} = 4 \cdot l_{OA} = 4 \cdot 0,025 = 0,1 \text{ м}$. На плані положення відповідно довжини кривошипу (OA) і шатуна (AB) будуть:

$$OA = l_{OA} / \mu_l = 0,025\text{ м} / 0,01 = 25\text{ мм}, AB = l_{AB} / \mu_l = 0,1\text{ м} / 0,001 = 100\text{ мм}.$$

Побудова плану швидкостей. Визначаємо швидкість точки A кривошипу OA :

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 5 \cdot 0,025\text{ м} = 0,125\text{ м/с}.$$

Щоб визначити інші величини швидкостей точок які належать ланкам механізму необхідно побудувати план швидкостей.

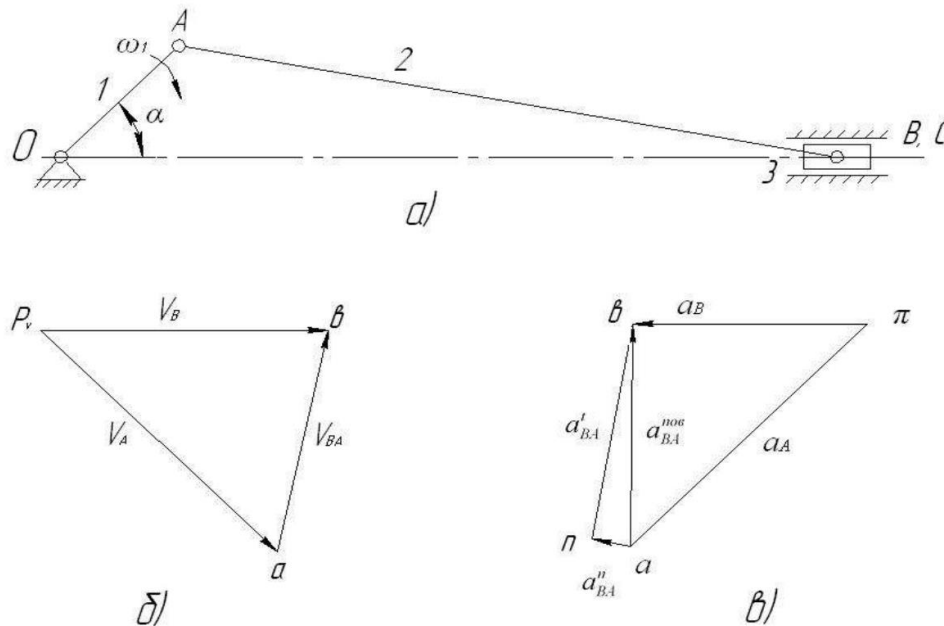


Рис.4.4 Побудова планів швидкостей та прискорень

Для його побудови необхідно записати векторне рівняння швидкостей:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

де \vec{V}_A – швидкість точки A кривошипа OA . Вона перпендикулярна кривошипу OA і направлена у бік його обертання; \vec{V}_{BA} – швидкість точки B шатуна в обертальному русі відносно точки A , направлена перпендикулярно осі ланки AB ; \vec{V}_B – швидкість точки B повзуна 3, направлена горизонтально вправо.

Для побудови плану швидкостей потрібно визначити масштабний коефіцієнт за формулою:

$$\mu_v = \frac{V_A}{[pa]},$$

де $[pa]$ – довільно вибраний на кресленні відрізок, мм. Довжину цього відрізка бажано вибирати в межах 50...80мм. Прийmemo відрізок $[pa]=50\text{мм}$. Тоді масштаб плану швидкостей буде:

$$\mu_v = \frac{0,125}{50} = 0,0025 \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}}.$$

Тепер приступаємо до побудови планів швидкостей. Для цього розглянемо методику побудови плану швидкостей для даного положення механізму. Вибираємо на кресленні точку, позначивши її p , яка буде полюсом плану (рис. 4.4,б). З полюса відкладаємо відрізок $[pa]$, який відповідає швидкості точки А кривошипу (OA). З отриманої точки «а» проводимо лінію, яка є перпендикулярною осі шатуна (ланка АВ), а з полюса p проводимо горизонтальну лінію. Перетин цих двох ліній дасть точку «b». Відрізки $[pb]$ і $[ab]$ відповідають швидкостям \vec{V}_B і \vec{V}_{BA} .

Величини цих швидкостей визначаються:

$$V_B = [pb] \cdot \mu_v = 38 \cdot 0,0025 = 0,095 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$V_{BA} = [ab] \cdot \mu_v = 40 \cdot 0,0025 = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{0,1}{0,1} = 1 \text{с}^{-1}.$$

Побудова плану прискорень. Оскільки кривошип ОА обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_1 = 5 \text{с}^{-1}$, тому точка А ланки ОА має тільки нормальне прискорення. Величина цього прискорення визначається за формулою:

$$a_A = \omega^2 \cdot l_{OA} = 5^2 \cdot 0,025 = 0,625 \text{с}^{-2}$$

Визначаємо масштабний коефіцієнт планів прискорень:

$$\mu_a = \frac{V_A}{[\pi a]},$$

де $[\pi a]$ – довжина відрізка, що зображає на плані прискорень вектор нормального прискорення точки A кривошипа OA . Приймаємо $[\pi a] = 50 \text{ мм}$ тоді:

$$\mu_a = \frac{0,625}{50} = 0,0125 \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}^2}.$$

З довільної точки π , полюса прискорень, проводимо вектор прискорення \vec{a}_A паралельно вісі кривошипу OA (рис. 4.4,в). Вектор цього прискорення направлений від точки A до точки O .

Побудову плану прискорень групи Ассура 2 класу 2 порядку 2 виду (ланки 2, 3) виконуємо згідно векторного рівняння:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r.$$

де \vec{a}_B – прискорення повзуна 3, направлене паралельно напрямній, уздовж якої рухається повзун 3; \vec{a}_{BA}^n – нормальне прискорення точки B шатуна AB при його обертанні навколо точки A , направлене паралельно осі шатуна від точки B до точки A . Величина його буде:

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot l_{AB} = 1^2 \cdot 0,1 = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}^2}.$$

Дотичне прискорення a_{BA}^r точки B шатуна AB , при його обертанні навколо точки A (величина його невідома), направлене перпендикулярно осі ланка AB .

Визначаємо довжину відрізка який на плані прискорень буде зображати прискорення a_{BA}^n .

$$(an) = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{0,1}{0,0125} = 8 \text{ мм}$$

Від точки «а» відкладаємо відрізок $(an) = 8 \text{ мм}$. З отриманої на кресленні точки «п» проводимо лінію перпендикулярну осі шатуна AB . Із полюса «п» проводимо горизонтальну лінію. Перетин цих двох ліній дасть точку «b». Точку «b» і точку «а» з'єднуємо прямою лінією.

Інші величини прискорень будуть:

$$a_{BA}^{\tau} = 40 \cdot 0,0125 = 0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_{BA}^{nog} = 41 \cdot 0,0125 = 0,5125 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_B = 30 \cdot 0,0125 = 0,4875 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Відповідно кутове прискорення ланки AB дорівнює:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{l_{AB}} = \frac{0,5}{0,1} = 5 \text{ с}^{-2}$$

Приклад 2. Визначити абсолютну швидкість і прискорення точки D кривошипного механізму з хитким повзуном (рис.4.5). Дано $l_{OA} = 0,1 \text{ м}$, $l_{OB} = 0,3 \text{ м}$, $l_{AD} = 0,35 \text{ м}$; кутова швидкість кривошипа OA постійна і дорівнює $\omega_1 = 100 \cdot \text{с}^{-1}$, кут $\alpha = 60^\circ$.

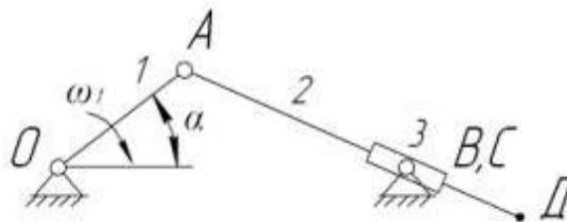


Рис.4.5 Кривошипно-шатунний механізм з хитким повзуном

Рішення. Будуємо в масштабі $\mu_l = 0,0025 \text{ м/мм}$ план положення механізму для кута $\alpha = 60^\circ$, (рис. 4.6,а). Для цього переводимо довжини ланок з метрових

розмірів у міліметрові. Довжина OA буде: $OA = \frac{l_{OA}}{\mu} = 0,1 / 0,0025 = 40 \text{ мм}$, а

довжина $OB = \frac{l_{OB}}{\mu} = 0,3 / 0,0025 = 120 \text{ мм}$.

План швидкостей. Спочатку визначаємо швидкість точки кривошипа:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 100 \cdot 0,1 \text{ м} = 10 \text{ м/с}.$$

Щоб визначити інші величини швидкостей точок які належать ланкам механізму необхідно побудувати план швидкостей. У даному механізмі ланка 2 здійснює обертовий і поступальний рухи. Рух точки B , котра належить ланці 2, можна розглядати як складний, який складається з двох рухів: переносного, з відповідною швидкістю \vec{V}_A і відносного, зі швидкістю \vec{V}_{BA} , спрямованою перпендикулярно кулісі AD . Тоді:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

де \vec{V}_B - абсолютна швидкість точки B , яка спрямована уздовж куліси AD .

Вектор \vec{V}_A направлений перпендикулярно до кривошипа OA , в бік його обертання. Для побудови плану швидкостей необхідно визначити масштаб:

$$\mu_v = \frac{\vec{V}_A}{[Pa]} = \frac{10}{50} = 0,02 \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}}$$

Для визначення векторів швидкостей \vec{V}_B і \vec{V}_{BA} проведемо з полюса вектор швидкості \vec{V}_A довжиною 50 мм і отримаємо точку «а». Через точку «а» (рис. 4.6,б) проводимо лінію, яка вказує напрямок вектора відносної швидкості (\vec{V}_{BA}), а з полюса p – лінію, паралельну шатуну AD . Точка перетину цих ліній визначить точку «в». Відрізок (av) не тільки визначає масштаб модуля швидкості V_B , але й водночас він є планом швидкості шатуна AD .

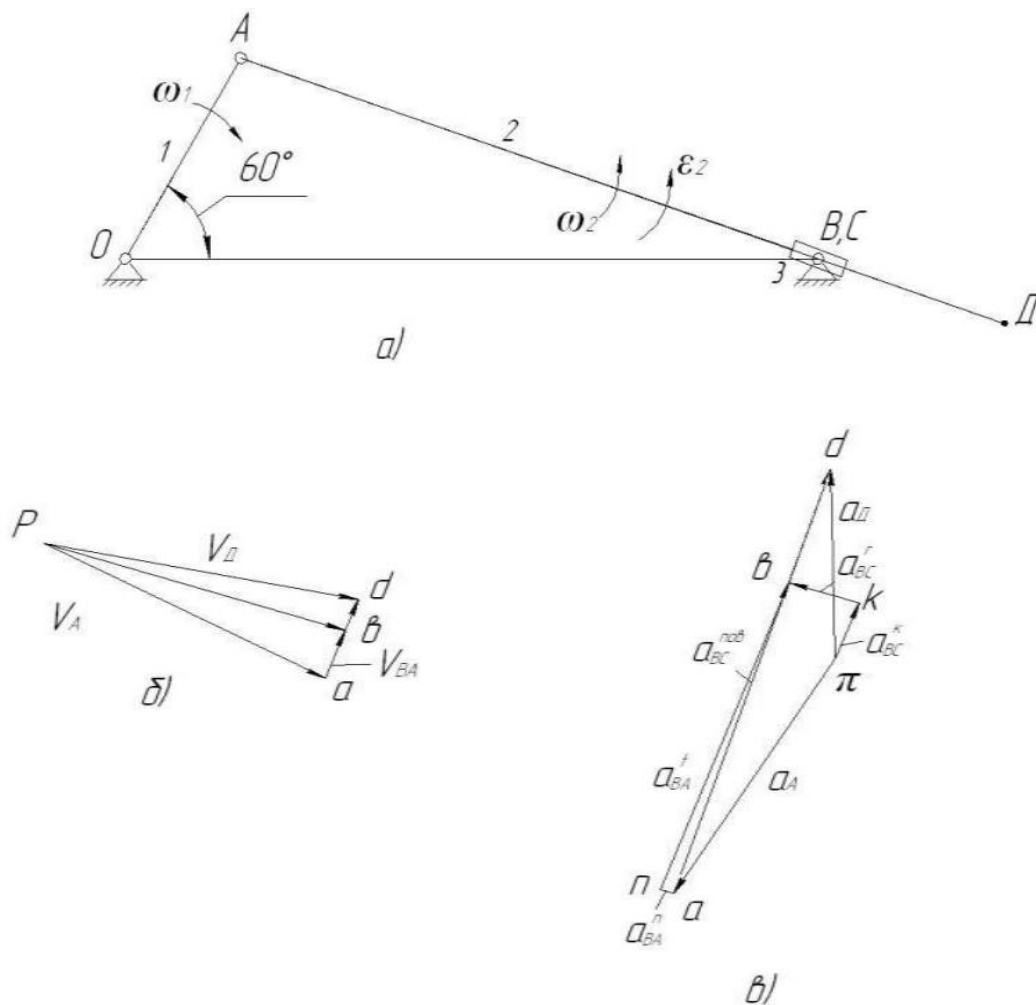


Рис.4.6 :а) схема механізму, б) план швидкостей; в) план прискорень

Величина швидкості \vec{V}_B визначається за формулою:

$$V_B = [\rho b] \cdot \mu_v = 49 \cdot 0,2 = 9,8 \frac{м}{с}$$

Швидкість точки Д, що лежить на кінці шатуна можна визначити за теоремою подібності. На плані швидкості вона лежатиме на відрізку (ad). Для визначення цієї швидкості необхідно скласти наступну пропорцію:

$$\frac{ad}{ab} = \frac{AD}{AB},$$

звідки довжина відрізка (ad) дорівнює:

$$ad = ab \frac{AD}{AB} = 10 \cdot \frac{140}{100} = 14_{мм}.$$

Відкладаємо відрізок (ad) на плані швидкостей і, з'єднавши точку « d » із полюсом « p », отримуємо швидкість точки D :

$$V_D = [pd] \cdot \mu_v = 48 \cdot 0,2 = 9,6 \frac{m}{c}$$

План прискорень. Для визначення прискорення точки D необхідно побудувати план прискорення, Запишемо систему векторних рівнянь прискорення для точки B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t,$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BC}^k + \vec{a}_{BA}^r.$$

В даній системі векторних рівнянь прискорення точки C дорівнює нулю (a_C) = 0. Прискорення точки A дорівнює:

$$a_A = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = 100^2 \cdot 0,1 = 1000 \frac{m}{mm \cdot c^2}.$$

Нормальне (a_{BA}^n) і Коріолісове (a_{BA}^k) прискорення:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}} = \frac{(ab)^2 \cdot \mu_v^2}{(AB)\mu_l} = \frac{14^2 \cdot 0,2^2}{102 \cdot 0,0025} = 30,75 m \cdot c^{-2},$$

$$a_{BC}^k = 2\omega_2 \cdot V_B = 2 \cdot \frac{(ab)^2 \cdot \mu_v^2}{(AB)\mu_l} (pb)\mu_v = 2 \cdot \frac{14 \cdot 0,2}{102 \cdot 0,0025} \cdot 50 \cdot 0,2 = 219,61 m \cdot c^{-2}.$$

Визначимо напрямки прискорень, що містяться в даній системі векторних рівнянь. Прискорення точки A (a_A) спрямоване вздовж лінії OA від точки A до точки O . Нормальне прискорення точки B відносно точки A (a_{BA}^n) спрямоване по лінії AB від точки B до точки A . Дотичне прискорення (a_{BA}^t) буде спрямоване перпендикулярно ланці AB . Для визначення напрямку Коріолісового прискорення, необхідно вектор швидкості V_B (рис. 4.6,б) повернути на 90° в бік

переносної кутової швидкості ω_2 . Відносне (релятивне) прискорення направлене вздовж осі куліси AD . Його величина невідома.

Підрахуємо масштабний коефіцієнт плану прискорень A на плані прискорень:

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = \frac{1000}{50} = 20 \frac{м}{мм \cdot c^2}$$

Відрізок, який відображає a_{BA}^n на плані прискорень, дорівнює:

$$(\pi a) = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{30,75}{20} = 1,5_{мм}.$$

Підрахуємо довжину відрізка, котрий буде зображати вектор \vec{a}_{BC}^k на плані прискорень:

$$(\pi k) = \frac{a_{BC}^k}{\mu_a} = \frac{219,61}{20} = 11_{мм}.$$

Будуємо план прискорень для кулісного механізму (рис. 4.6,в). Прискорення точки D визначається за теоремою подібності:

$$\frac{ad}{ab} = \frac{AD}{AB},$$

звідки

$$ad = ab \frac{AD}{AB} = 60 \cdot \frac{140}{100} = 84_{мм}$$

Відкладаємо від точки «а» по лінії (ab) відрізок $(ad)=84_{мм}$ і отримуємо точку «d», з'єднуємо цю точку з полюсом плану прискорень, відрізок (πd) дасть напрям прискорення a_d . Величина прискорення a_d дорівнює:

$$a_d = (\pi d) \cdot \mu_a = 32 \cdot 20 = 640_{м / c^2}.$$

4.6 Завдання для самостійної роботи

1. Знайти абсолютну швидкість і прискорення точки D шарнірного чотириланкового механізму (рис. 4.7) та кутові швидкості і кутові прискорення ланок AB і BC . Дані для розрахунку згідно варіантів наведено у таблиці 4.1.

Вважати, що $l_{AB} = l_{BC}, l_{CD} = 2l_{BC}$.

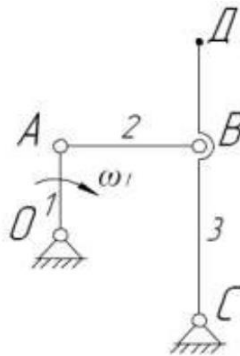


Рис.4.7 Чотириланковий механізм

Таблиця 4.1 Варанти завдань для самостійної роботи

№ Варіанту (1-20)	Лінійні розміри ланок, l_{OA}, l_{AB}	Кутова швидкість, рад/с
1	2	3
1	0,05м; 0,2м	20
2	0,8м; 0,1м	60
3	0,9м; 0,2м	70
4	1м; 0,1м	80
5	0,7м; 0,2м	55
6	0,85м; 0,3м	65
7	0,95м; 0,1м	75
8	1м; 0,2м	85
9	0,75м; 0,1м	95
10	0,95; 0,3м	90
11	0,7м; 0,1м	85
12	0,85м; 0,2м	70
13	0,95; 0,1м	85
14	1м; 0,1м	65
15	0,75м; 0,3м	75
16	0,95м; 0,2м	95

1	2	3
17	0,8м;0,3м	85
18	0,85м;0,1м	100
19	1м;0,2м	85
20	0,75м;0,3м	95

2. Визначити кутові швидкості і кутові прискорення ланок l_{AB}, l_{BC}

шарнірного чотириланкового механізму та лінійні швидкість і прискорення

точки Д (рис.4.8). Дані для розрахунку згідно варіантів наведено в таблиці 4.2.

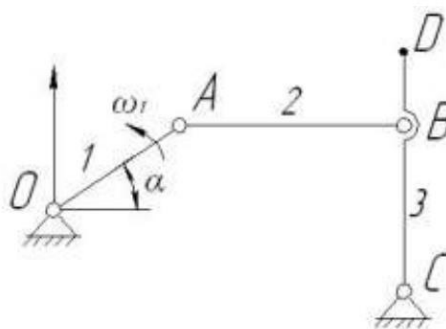


Рис. 4.8 Чотириланковий механізм

Таблиця 4.2 Варіанти завдань для самостійної роботи

№ Варіанту (1-20)	Лінійні розміри ланок, l_{OA}, l_{AB}	Кутова швидкість, рад/с	Кут, α°
1	2	3	4
1	0,05м; 0,2м	20	45
2	0,8м;0,1м	60	45
3	0,9м; 0,2м	70	45
4	1м;0,1м	80	45
5	0,7м;0,2м	55	45
6	0,85м;0,3м	65	45
7	0,95м;0,1м	75	45
8	1м;0,2м	85	45

1	2	3	4
9	0,75м;0,1м	95	45
10	0,95;0,3м	90	45
1	2	3	4
11	0,7м; 0,1м	85	45
12	0,85м;0,2м	70	45
13	0,95;0,1м	85	45
14	1м;0,1м	65	45
15	0,75м;0,3м	75	45
16	0,95м;0,2м	95	45
17	0,8м;0,3м	85	45
18	0,85м;0,1м	95	45
19	1м;0,2м	90	45
20	0,75м;0,3м	85	45

3.(Додаткова) Визначити лінійні швидкість і прискорення третьої ланки синусного механізму зернозбирального комбайну (рис. 4.9 і рис.4.10). Дано: $l_{OA} = 0,2$; $\omega_1 = 10 \text{ c}^{-1}$; $\alpha = 45^\circ$.

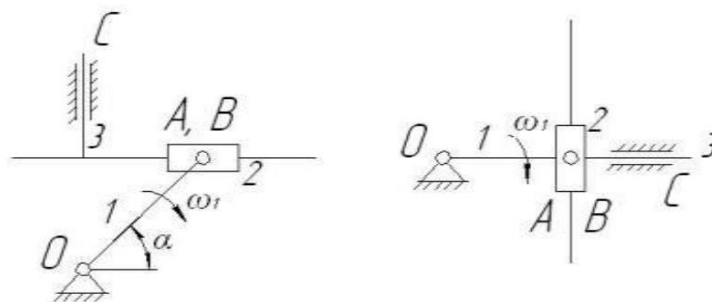


Рис. 4.9-4.10 Синусний механізм

4.7 Контрольні запитання

1. План швидкостей. Побудова плану швидкостей.
2. План прискорень. Побудова плану прискорень.

3. Масштабний коефіцієнт плану швидкостей.
4. Масштабний коефіцієнт плану прискорень.
5. Властивості плану швидкостей.
6. Властивості плану прискорень.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №5

Силовий розрахунок механізмів

Мета роботи: навчитись виконувати силовий розрахунок механізмів

Теоретична частина

5.1 Загальні положення

Під час роботи механізму в результаті дії всіх прикладених до ланок сил у кінематичних парах, наприклад у вузлах шасі літака (рис.5.1), виникають реакції, які безпосередньо не впливають на характер руху механізму, однак на поверхнях елементів кінематичних пар викликають сили тертя, які є силами шкідливого опору.

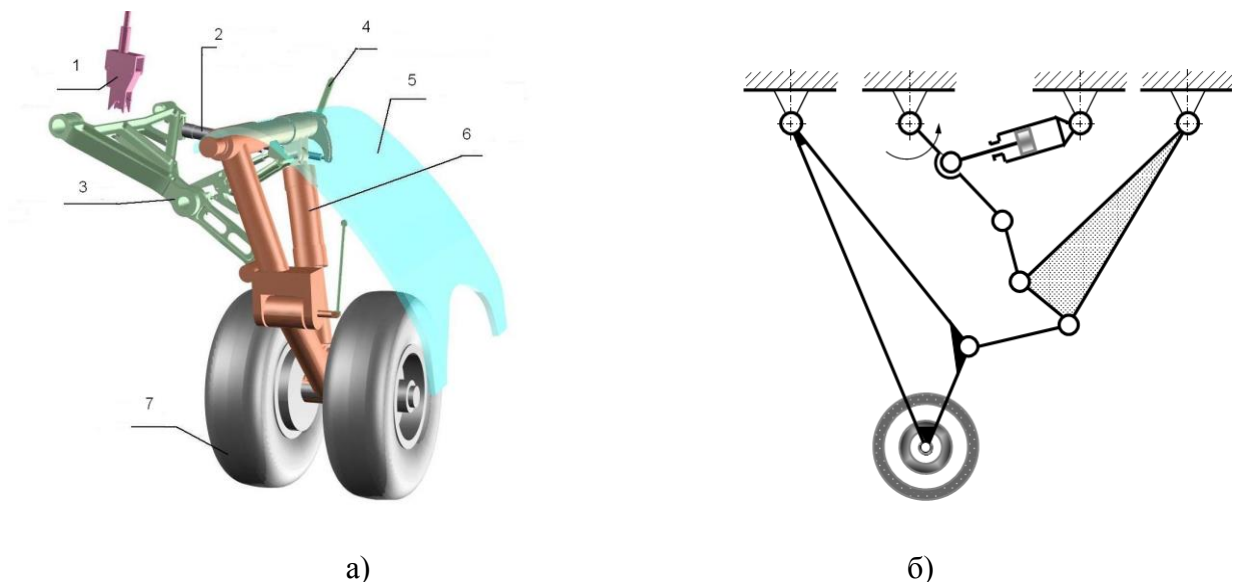


Рис.5.1 Шасі літака: а) механізм ; б) структурна схема

1- замок прибраного положення; 2 - циліндр прибрання-випуску; 3 - підкіс, що складається;
4- лобовий розкіс; 5 - бічна ступка; 6 - стійка; 7 - колесо

Силовий розрахунок полягає у визначенні реакцій у кінематичних парах. Визначені сили і моменти сил необхідні для розрахунку ланок на міцність, жорсткість, зносостійкість і вібростійкість, для визначення потужності двигуна, ККД та інших розрахунків, які виконуються при проектуванні механізмів.

Використовуючи рівняння рівноваги для розрахунку ланок, що рухаються, у даних задачах застосовується принцип Д'Аламбера згідно якого *ланка механізму може знаходитися в рівновазі, якщо до всіх активних сил і сил реакцій, що діють на ланку, додати сили інерції.*

Рівняння рівноваги в даному випадку називаються рівняннями кінетостатики, щоб відрізнити їх від звичайних рівнянь статички, а метод силового розрахунку з їх використанням, *кінетостатичним аналізом механізму.*

5.2 Класифікація сил, які діють на механізм, методи їх визначення

Розглянемо основні групи сил, які враховуються при динамічному аналізі механізмів і машин.

Рушійні сили і моменти - це сили, які виконують додатну роботу за час дії або цикл роботи механізму. Вони прикладаються до вхідної ланки, яка в цьому випадку називають ведучою.

Сили і моменти опору – сили, що виконують від'ємну роботу за час дії або цикл роботи механізму. Вони в свою чергу діляться на ***сили і моменти корисного опору і сили і моменти опору середовища.***

Сили корисного опору виконують роботу, для виконання якої машина створювалась. Вони прикладаються до ведених ланок.

Сили опору середовища – це сили, пов'язані з непродуктивними втратами потужності. Часто вони малі і в задачах динаміки ними нехтують.

Сили ваги прикладаються в центрах мас ланок.

$$G_i = m_i g$$

Робота цих сил за цикл дорівнює нулю. На певному відрізку часу вони можуть виконувати як додатну, так і від'ємну роботу.

Сили інерції виникають у разі прискореного руху ланок і їх можна розглядати як реакції маси на зміну швидкості.

У загальному випадку плоско-паралельного руху розподілені по об'єму тіла сили інерції можуть бути зведені до головного вектора і головному моменту сил інерції, які прикладають в центрі ваги ланки.

$$\vec{F}_{a_i} = -m_i \vec{a}_{s_i},$$

$$\vec{M}_{a_i} = -\vec{\varepsilon}_i J_{s_i}.$$

де \vec{a}_{s_i} – прискорення центру мас S ланки; J_{s_i} – момент інерції маси ланки відносно осі, яка проходить через центр ваги ланки перпендикулярно до площини її руху; $\vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення ланки.

Розглянемо приклади визначення сил інерції для різних випадків руху ланок.

5.3 Ланка рухається поступально. В цьому випадку прискорення всіх точок ланки однакові. Отже

$$a_s = a_A = a_B; \varepsilon = 0.$$

Тому

$$\vec{F}_a = -m\vec{a}_s, M_a = 0. \quad (5.1)$$

Тобто, коли ланка рухається поступально, сили інерції зводяться лише до головного вектора, який прикладений в центрі мас ланки (рис. 5.2).

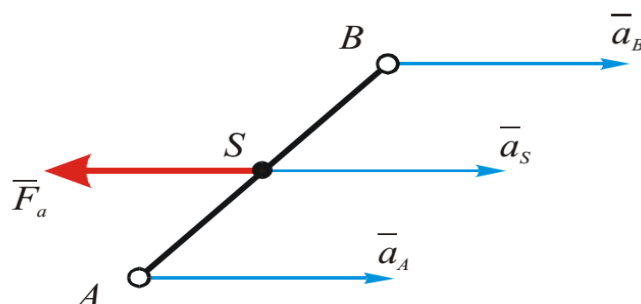


Рис.5.2 Ланка, яка рухається поступально

5.4 Ланка здійснює обертальний рух відносно центру мас.

В цьому випадку центр мас S ланки нерухомий, тобто $a_s = 0$. Проте $\omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$.

Отже

$$\vec{F}_a = 0, \vec{M}_a = -J_s \vec{\varepsilon} \quad (5.2)$$

Таким чином, коли ланка обертається навколо нерухомого центра мас, сили інерції, які на неї діють, зводяться лише до головного моменту (рис. 5.3).

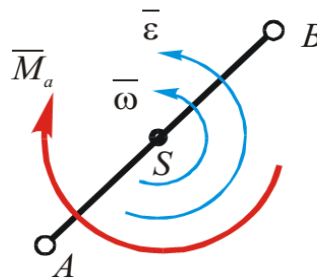


Рис. 5.3 Обертальна ланка (центр обертання збігається з центром мас)

5.5 Методика і порядок силового розрахунку механізмів

Відомо, що у механізмах статично визначеними системами є структурні групи Ассура. Тому при силовому розрахунку механізм поділяється на структурні групи, до яких слід прикласти усі зовнішні сили, включаючи динамічні (сили інерції і моменти від сил інерції). До вільних елементів кінематичних пар слід прикласти реакції. Під дією усіх цих сил структурна група знаходиться у рівновазі, а тому можна скласти відповідну кількість рівнянь рівноваги, розв'язуючи які знаходяться невідомі реакції. Причому силовий розрахунок треба починати з останньої приєднаною до механізму структурної групи і закінчувати силовим розрахунком початкової ланки.

5.6 Приклади на силовий розрахунок механізмів

Приклад. Визначити реакції в кінематичних парах O, A, B і C кривошипно – повзункового механізму одноциліндрового двигуна внутрішнього

згорання (рис.5.4). Розміри ланок: $l_{OA}=0,25\text{м}, l_{AB}=0,60\text{м}, l_{AS_2}=0,2\text{м}$ Навантаження на ланки механізму: $F_p=1000\text{Н}, F_{iH_3}=250\text{Н}, F_{iH_2}=200\text{Н}, M_{iH_3}=2\text{Н}\cdot\text{м}$. Кут відхилення ланки OA від осі OX $\alpha=30^\circ$, а кут відхилення сили F_{iH_2} дорівнює $\beta=60^\circ$.

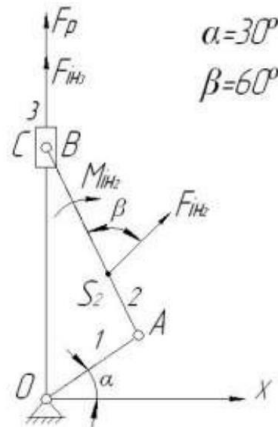


Рис.5.4 Кривошипно-шатунний механізм одноциліндрового двигуна внутрішнього згорання

Рішення. Виділяємо групу Ассура і прикладаємо до неї всі відомі сили і реакції в точках A і C (рис.5.5,а). Для визначення реакції в точці A складемо рівняння рівності нулю сум моментів усіх сил, що діють на ланки 2 і 3, відносно пари A. Напрямок реакції R_C приймаємо довільно. Якщо в результаті розрахунку значення реакції матиме від'ємне значення, то це буде свідчити про те, що дійсний напрямок реакції буде протилежним прийнятому. Для складання рівняння моментів на рисунку (рис.5.5,а) проставимо короткі відстані від шарніра A до сил які діють на групу.

$$\sum M(A) = 0, (F_p + F_{iH_3}) \cdot H_2 + F_{iH_2} \cdot H_3 + M_{iH_2} - R_C \cdot H_1 = 0.$$

Із записаного моментного рівняння визначаємо величину і напрямок реакції R_C :

$$R_C = \frac{(F_p + F_{iH_3}) \cdot H_2 + F_{iH_2} \cdot H_3 + M_{iH_2}}{H_1},$$

$$R_C = \frac{(F_p + F_{iH_3}) \cdot H_2 + F_{iH_2} \cdot H_3 + M_{iH_2}}{H_1} = \frac{(1000 + 250) \cdot 0,20 + 200 \cdot 0,15 + 2,0}{0,58} = 486,2\text{Н}.$$

Складемо векторне рівняння рівноваги сил, що діють на групу Ассура (ланки 2–3):

$$\sum \vec{F}_i = \vec{R}_C + \vec{F}_p + \vec{F}_{iH_3} + \vec{F}_{iH_2} + \vec{R}_A = \vec{0}.$$

У цьому рівнянні невідомі величина і напрямок реакції \vec{R}_A . Величина і напрямок цієї реакції можуть бути визначені шляхом побудови плану сил. Визначимо масштаб плану сил за формулою:

$$\mu_F = \frac{F_p}{(1-2)} = \frac{1000}{100} = \frac{10H}{мм}.$$

Відомі за величиною сили переводимо у відрізки (рис.5.5,б):

$$(5-1) = \frac{R_c}{\mu_F} = \frac{486,2}{10} = 48,62 мм ;$$

$$(2-3) = \frac{F_{H3}}{\mu_F} = \frac{250}{10} = 25 мм ;$$

$$(3-4) = \frac{F_{H2}}{\mu_F} = \frac{200}{10} = 20 мм .$$

З точки 5 відкладаємо вектор (5-1). Далі, до цього вектора додаємо два вектори (1-2) і (2-3), які направлені вертикально уверх. До точки 3 додаємо вектор (3-4).

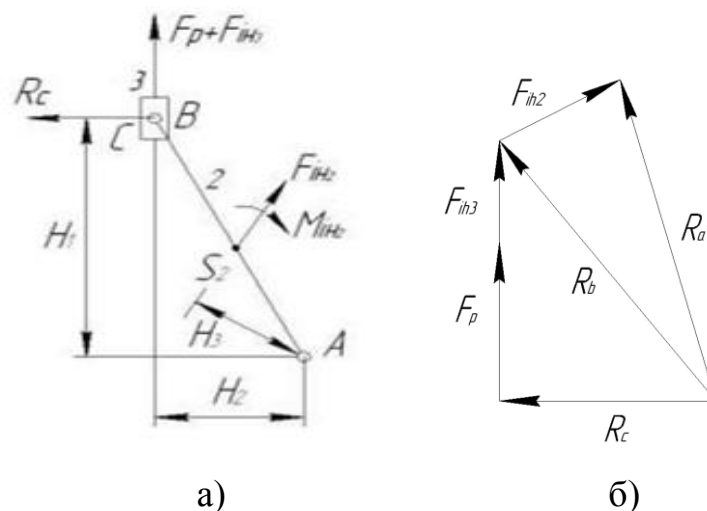


Рис.5.5 : а) схема механізму, б) схема сил

Після побудови всіх відомих сил векторного рівняння з'єднуємо точки 4 і 5, і одержуємо вектор (4-5), що зображує невідому за напрямком реакцію \vec{R}_A (рис. 5.5,б). Модуль цієї реакції визначається наступним чином:

$$\vec{R}_A = (4-5) \cdot \mu_F = 142 \cdot 10 = 1420H .$$

Переходимо тепер до визначення реакції в кінематичній парі O. Для цього розглянемо рівновагу механізму першого класу (рис.5.6,а). Рівновага буде

тоді, коли до пари А приєднаємо реакцію \vec{R}_A і зрівноважувальну силу F_{zp} . Реакція \vec{R}_A в точці А, що діє з боку ланки 2 на ланку 1, дорівнює за величиною, але протилежна за напрямком реакції, що діє на ланку 2 з боку ланки 1. Щоб була рівновага механізму першого класу, необхідно в точку А прикласти силу F_{zp} , перпендикулярно ланці ОА. Запишемо рівняння рівноваги моментів сил, що діють на ланку 1, відносно точки О:

$$\sum M(O) = F_{zp} \cdot l_A - R_A \cdot H_A = 0;$$

$$F_{zp} = \frac{R_A \cdot H_A}{l_A} = \frac{1420 \cdot 0,23}{0,25} = 1306,4 \text{ Н}.$$

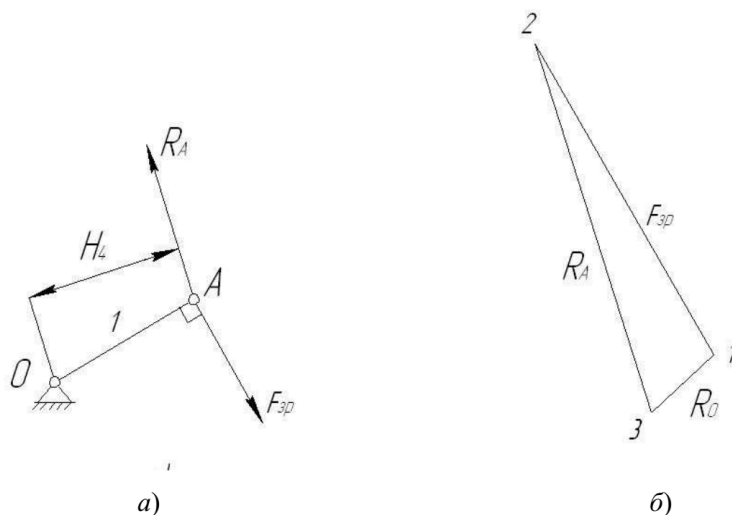


Рис.5.6 : а) рівновага механізму першого класу, б) розрахунок невідомої реакції
Складемо векторне рівняння сил, що діють на ланку 1:

$$\vec{F}_{zp} + \vec{F}_A + \vec{F}_O = \vec{0}.$$

Для визначення реакції R_O побудуємо план сил в масштабі $\mu_F = 20 \text{ Н / мм}$.

Переводимо відомі за модулем сили у відрізки:

$$(1-2) = \frac{F_{zp}}{\mu_F} = 1306,4 / 20 = 65,3 \text{ мм}, (2-3) = \frac{R_A}{\mu_F} = 1429 / 20 = 71 \text{ мм}.$$

Знаючи розміри векторів сил на кресленні будуємо план сил, для цього з точки 1 відкладаємо вектор (1–2), а з точки 2 вектор (2–3). Точки 3 і 1 з'єднуємо прямою лінією. Відрізок (1–3) дасть нам напрямок вектора реакції \vec{R}_O . Величину реакції можна визначити так:

$$R_o = (1-3) \cdot \mu_F = 30 \cdot 20 = 600 \text{ Н}.$$

5.7 Завдання для самостійної підготовки

1. Визначити реакції в кінематичних парах O , A , B , C (рис.5.7) і зрівноважувальний момент $M_{зр}$, який прикладений до ланки OA , якщо $AB = BC$, кут φ , вісь ланки AB – горизонтальна, а вісь ланки BC – вертикальна. Ланки AB і BC навантажені силами F_2, F_3 , величини яких рівні між собою $F_2 = F_3$. Сили прикладені в точках D і K , котрі ділять між шарнірні відстані навпіл. Числові дані наведені в таблиці 5.1.

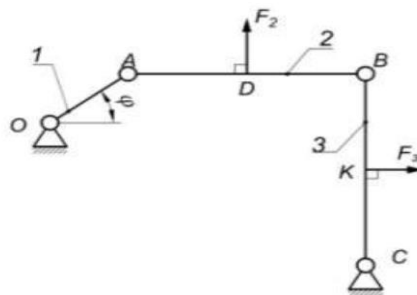


Рис.5.7 Визначення реакцій в кінематичних парах

Таблиця 5.1 Варіанти завдань для самостійної роботи

№ Варіанту (1-20)	Лінійні розміри ланок, l_{OA}, l_{AB}	Кут, φ°	$F_2 = F_3, \text{Н}$
1	2	3	4
1	0,1м; 0,2м	45	100
2	0,8м; 0,1м	45	200
3	0,9м; 0,2м	45	300
4	1м; 0,3м	45	400
5	0,7м; 0,1м	45	100
6	0,85м; 0,3м	45	200
7	0,95м; 0,2м	45	300
1	2	3	4
8	1м; 0,1м	45	400

1	2	3	4
9	0,75м; 0,2м	45	100
10	0,95м; 0,3м	45	200
11	0,7м; 0,2м	45	300
12	0,85м; 0,3м	45	400
13	0,95м0,2м	45	100
14	1м; 0,1м	45	200
15	0,75м; 0,2м	45	300
16	0,95м; 0,3м	45	400
17	0,8м; 0,2м	45	100
1	2	3	4
19	0,7м; 0,2м	45	300
20	0,85м; 0,1м	45	400

2. Визначити реакції в кінематичних парах О, А і В і точках C_1, C_2 синусного механізму (рис. 5.8) і зрівноважувальний момент $M_{зр}$, який прикладений до ланки ОА, від сили F_3 , що діє на ланку 3. Числові значення вказаних величин наведені в таблиці 5.2.

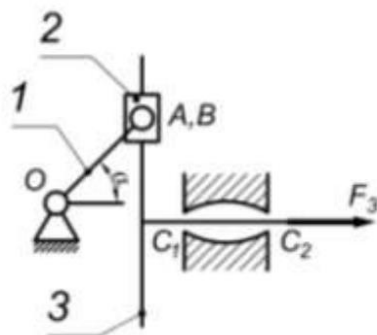


Рис.5.8 Визначення реакцій в кінематичних парах

Таблиця 5.2 Варіанти для самостійної роботи

№ Варіанту (1-20)	Лінійні розміри ланок, l_{OA}, l_{CC_2}	Кут, α°	$F_3, \text{Н}$
1	0,2м; 0,1м	45	100
2	0,3м; 0,15м	45	200
3	0,4м; 0,2м	45	300
4	0,2м; 0,1м	45	400
5	0,2м; 0,1м	45	100
6	0,3м; 0,15м	45	200
7	0,4м; 0,2м	45	300
8	0,2м; 0,1м	45	400
10	0,3м; 0,15м	45	200
11	0,4м; 0,2м	45	300
12	0,2м; 0,1м	45	400
13	0,2м; 0,1м	45	100
14	0,3м; 0,15м	45	200
15	0,4м; 0,2м	45	300
16	0,2м; 0,1м	45	400
17	0,2м; 0,1м	45	100
18	0,3м; 0,15м	45	200
19	0,4м; 0,2м	45	300
20	0,2м; 0,1м	45	400

5.8 Контрольні запитання

1. У чому полягає силовий розрахунок механізму?
2. Класифікація сил, що діють на механізм.
3. Методика визначення сил.
4. Побудова плану сил.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №6

Синтез зубчастих зачеплень.

Мета роботи: навчитись визначати кутові швидкості, передатні відношення складних зубчастих передач.

Теоретична частина

6.1 Основні поняття та задача синтезу

Зубчасте зачеплення – це вища кінематична пара, яка утворена послідовно взаємодіючими елементами двох ланок.

Зубчаста передача - це триланковий механізм, який складено з двох зубчастих коліс і стояка.

Зубчасті передачі призначені для передачі руху з одночасною зміною кутової швидкості та відповідно обертового моменту. Рухомими ланками зубчастого механізму є зубчасті колеса, які утворюють зі стояком нижчу кінематичну пару, а між собою - вищу. Елементами цієї вищої кінематичної пари є бокові поверхні зубців.

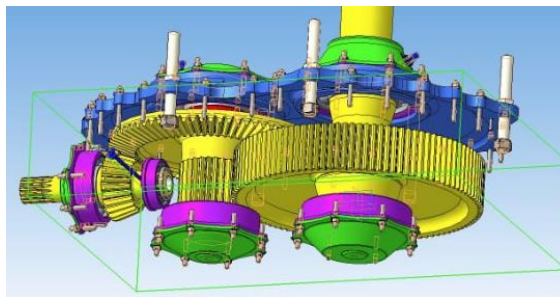


Рис. 6.1 Зубчастий механізм головного редуктора вертольота

Лінія перетину бокових поверхонь зубців із площиною, перпендикулярною до осі обертання колеса, називається *профілем зубця*.

Менше з двох коліс називається шестірнею, більше – колесом.

За формою колеса бувають: *круглі, конічні, еліптичні*.

Задача синтезу зубчастого зачеплення полягає в проектуванні елементів вищої кінематичної пари зубчастого зачеплення, тобто, профілів зубців, відповідно до заданих умов.

Умовами синтезу є:

- 5) положення осей обертання (паралельні, пересічні, перехресні);
- 6) необхідне передаточне відношення;
- 7) якісні показники зачеплення (коефіцієнти перекриття, відносного ковзання, питомого тиску);
- 8) експлуатаційні умови (плавність і безшумність роботи передачі, міцність, довговічність тощо).

Передаточне відношення - це відношення кутової швидкості ведучої ланки до кутової швидкості веденої ланки:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (6.1)$$

6.2 Багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями

Механізми триланкових зубчастих передач, що складаються з двох зубчастих коліс і стояка мають невеликі передаточні відношення (до 4...5).

Для отримання великих передаточних відношень (>5...10) застосовують так звані багатоланкові зубчасті механізми, які мають декілька послідовно з'єднаних коліс (пар коліс).

Такі передачі називаються рядовим з'єднанням. Передаточне відношення рядового з'єднання може бути визначено *аналітичним* або *графічним* методами.

Розглянемо рядове з'єднання, що складено з трьох послідовно з'єднаних пар коліс (рис. 6.2).

6.3 Аналітичний метод визначення передаточного відношення

Нагадаємо, що передаточне відношення – це відношення кутової швидкості вхідного вала (ведучого колеса) до кутової швидкості вихідного вала (веденого колеса).

Загальне передаточне відношення механізму на рис. 6.2:

$$i_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6}$$

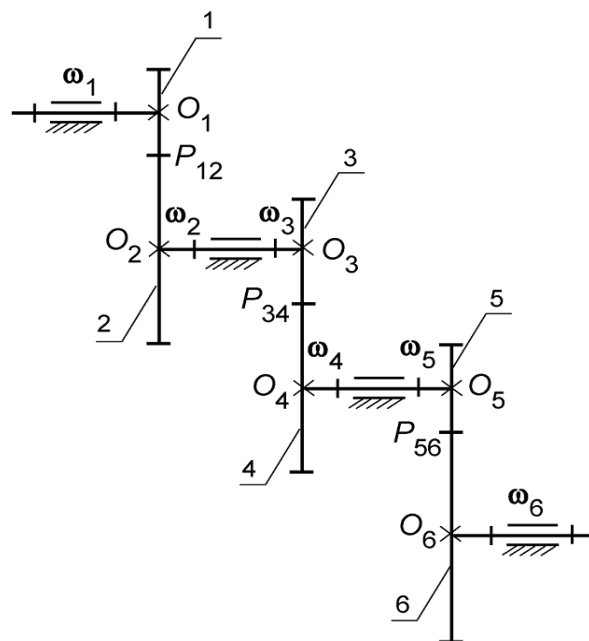


Рис.6.2 Кінематична схема рядового з'єднання $\omega_1, \dots, \omega_6$ -кутові швидкості зубчастих коліс 1...6; P_{12}, P_{34}, P_{56} - полюси и зачеплення пар коліс 1-2, 3-4, 5-6 відповідно.

У свою чергу передаточні відношення для кожної наведеної пари коліс:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4}, i_{56} = \frac{\omega_5}{\omega_6}.$$

Перемножимо передаточні відношення:

$$i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = i_{16}.$$

ТОМУ ЩО $\omega_2 = \omega_3, \omega_4 = \omega_5$.

Виражаємо передаточні відношення через число зубців коліс (ураховуємо зовнішні зачеплення коліс):

$$i_{12} = -\frac{z_2}{z_1}, i_{34} = -\frac{z_4}{z_3}, i_{56} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

Отже,

$$i_{16} = i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_6}{z_5}.$$

Для рядового з'єднання з числом коліс n :

$$i_{1n} = (-1)^m \frac{z_2 z_4 \dots z_n}{z_1 z_3 \dots z_{n-1}}. \quad (6.2)$$

де m - число тільки зовнішніх зачеплень. У деяких випадках застосовують рядові з'єднання з так званими паразитними колесами. Паразитними зубчастими колесами називаються колеса, які не впливають на величину передаточного відношення та застосовуються тільки для отримання кутової швидкості потрібного знака, а також для передачі обертального руху між далеко віддаленими один від одного валами.

Розглянемо приклад застосування паразитних коліс для зміни знака кутової швидкості (в цьому випадку число паразитних коліс має бути непарним (рис. 6.3).

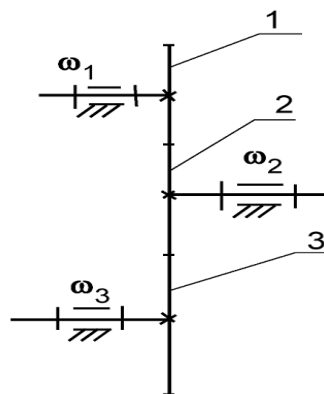


Рис. 6.3 Рядове з'єднання з паразитним колесом

Передаточне відношення кожної пари коліс:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3}.$$

Перемножимо ці передаточні відношення:

$$i_{12}i_{23} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{13}.$$

Виразимо передаточне відношення через числа зубців:

$$i_{12} = -\frac{z_2}{z_1}, i_{33} = -\frac{z_3}{z_2}.$$

Отже:

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{12} \cdot i_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{z_3}{z_1}.$$

6.4 Планетарні зубчасті передачі

Планетарні зубчасті передачі – це передачі, в яких є зубчасті колеса, що обертаються як навколо власної осі, так і навколо центральної осі. Такі колеса називаються *сателітами*.

Важіль, на якому розташовані осі сателітів, називається *водилом*. Центральні зубчасті колеса називаються *сонячними*. Якщо одне з центральних коліс нерухоме, а інше – рухоме, то механізм називається *планетарним*. Якщо всі колеса рухомі, то механізм називається *диференціальним*.

Редуктор – це зубчаста передача в корпусі, яка призначена для зниження кутової швидкості (частоти) та відповідно збільшення обертового моменту.

Задача *синтезу планетарного редуктора* полягає у визначенні кількості зубців зубчастих коліс за п'ятьма умовами:

- необхідного передаточного відношення;

- співвісності;
- збирання;
- сусідства;
- невідіривання (правильного зачеплення).

На рис.6.4 наведені кінематичні схеми найбільш поширених планетарних редукторів, а у табл. 6.1 – формули для 5 умов синтезу для цих типів редукторів.

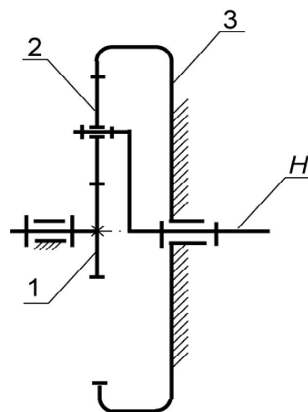
Загальна формула для умови 1 – необхідного передаточного відношення має вигляд:

$$i_{1H}^{(n)} = 1 - i_{1n}^{(H)}$$

де $i_{1n}^{(H)}$ - передаточне відношення в так званому “оберненому русі” (при зупиненому водилі). У дужках наведено номер нерухомого колеса.

В основу виведення формул для різних типів редукторів покладено метод Вілліса (метод обернення руху), згідно з яким усім зубчастим колесам і водилу надається кутова швидкість, яка дорівнює за абсолютною величиною, але протилежна за напрямом кутовій швидкості водила ($-\omega_H$), тоді водило

1 тип (Джеймса)
(1 зовнішнє, 1 внутрішнє зачеплення)



2 тип (Девіда)
(2 зовнішніх зачеплення)

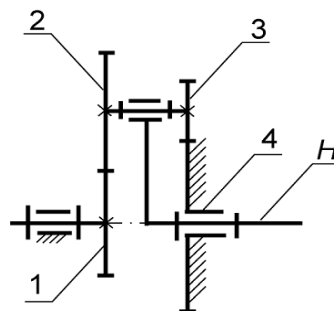


Рис.6.4(а) Схеми планетарних редукторів 1,2 типу

вважається “зупиненим”, і передачу можна розглядати як звичайне рядове з'єднання з нерухомими осями коліс.

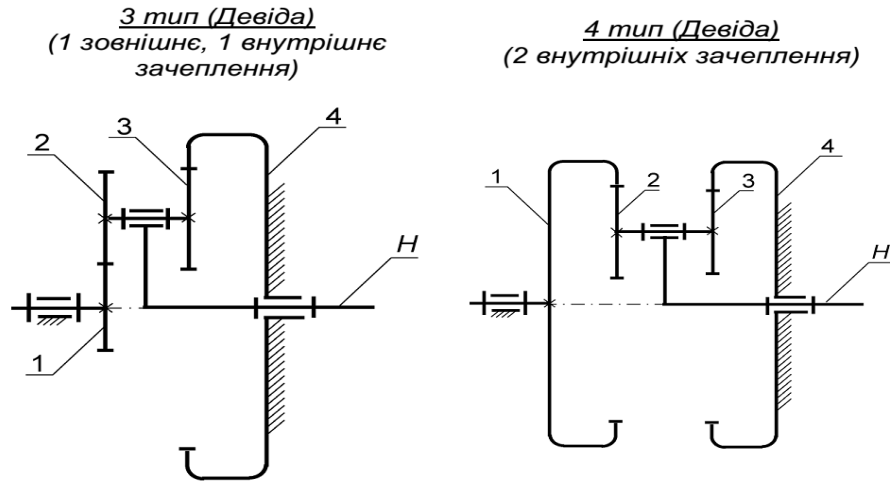
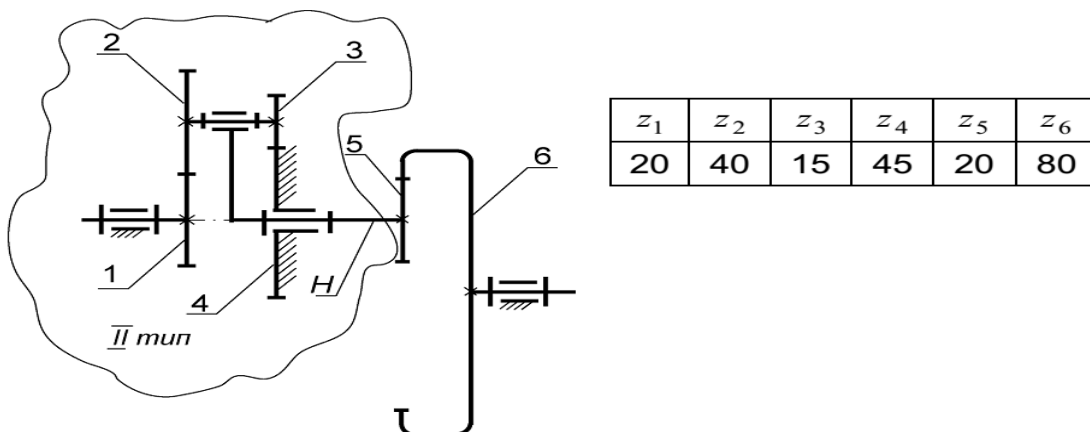


Рис.6.4(б) Схеми планетарних редукторів 3,4-типу

6.5 Приклади «Визначення кутової швидкості вихідної ланки багатоланкового зубчастого механізму»

Приклад. Визначити кутову швидкість заданого багатоланкового зубчастого механізму, якщо кутова швидкість вхідного валу $\omega_1 = 100 \text{ рад/с}$. Число зубців коліс наведено у таблиці.



Порядок розв'язання:

1. Це багатоланковий зубчастий механізм.

Таблиця 6.1 Формули перевірки 5 умов синтезу планетарних редукторів

1 тип (Джеймса)	2 тип (Девіда)
1. $i_{1H}^{(3)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$.	1. $i_{1H}^{(4)} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$.
2. $z_1 + z_2 = z_3 - z_2$.	2. $r_{w_1} + r_{w_2} = r_{w_3} + r_{w_4}$.
3. $\frac{z_1 + z_3}{K} = C$ – будь-яке ціле число	3. $\frac{z_4}{K} - \frac{z_1 z_3}{K z_2} = C$ – будь-яке ціле число
4. $\sin\left(\frac{\pi}{K}\right) > \frac{z_c^{\max} + 2h_a^*}{z_1 + z_2}$.	4. $\sin\left(\frac{\pi}{K}\right) > \frac{z_c^{\max} + 2h_a^*}{z_1 + z_2}$.
5. $z_1 \geq 17, \quad z_2 \geq 20; \quad z_3 \geq 85;$ $(z_3 - z_2) > 8$	5. $z_{\min} \geq 17$.
3 тип (Девіда)	4 тип (Девіда)
1. $i_{1H}^{(4)} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$.	1. $i_{1H}^{(4)} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$.
2. $z_1 + z_2 = z_4 - z_3$.	2. $z_1 - z_2 = z_4 - z_3$.
3. $\frac{z_4}{K} + \frac{z_1 z_3}{K z_2} = C$ – будь-яке ціле число	3. $\frac{z_4}{K} - \frac{z_1 z_3}{K z_2} = C$ – будь-яке ціле число
4. $\sin\left(\frac{\pi}{K}\right) > \frac{z_c^{\max} + 2h_a^*}{z_1 + z_2}$.	4. $\sin\left(\frac{\pi}{K}\right) > \frac{z_c^{\max} + 2h_a^*}{z_1 - z_2}$.
5. $z_1 \geq 17; \quad z_2 \geq 17; \quad z_3 \geq 20;$ $z_4 \geq 85$.	5. $z_1 \geq 85; \quad z_2 \geq 20;$ $z_3 \geq 20; \quad z_4 \geq 85$.

2. Вхідний вал –1, вихідний –6.

3. Тип редуктора –2-й (Девіда).

4. Загальне передаточне відношення механізму:

$$\omega_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = i_{1H} i_{56}$$

5. Передаточне відношення редуктора:

$$i_{1H} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

6. Передаточне відношення відкритої зубчастої пари:

$$i_{56} = \frac{z_6}{z_5} = \frac{80}{20} = 4$$

7. Загальне передаточне відношення:

$$i_{1H} = (-5) \cdot 4 = -20$$

8. Остаточно, кутова швидкість вихідної ланки 6:

$$\omega_6 = \frac{\omega_1}{i_{16}} = \frac{100}{-20} = -5 \text{ рад / с}$$

6.6 Завдання для самостійної підготовки

Визначити передаточне відношення i_{1H} комбінованого зубчатого механізму (рис. 6.5), якщо відомі числові значення чисел зубців: $z_1, z_2, z'_2, z_3, z_4, z'_4, z_5, z_6$, наведені у таблиці 6.1.

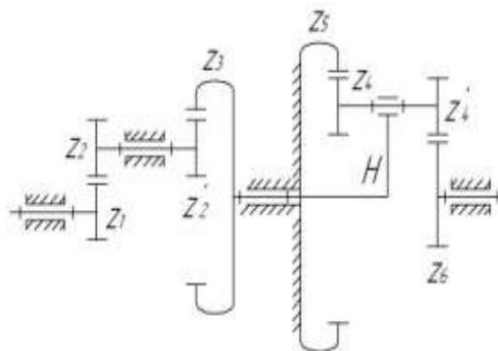


Рис.6.5 Визначення передатного числа комбінованого зубчатого механізму

Таблиця 6.1 Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант	z_1	z_2	z_2'	z_3	z_4	z_4'	z_5	z_6
1	18	36	17	51	20	15	80	45
2	15	30	14	42	30	40	60	35
3	14	28	15	45	25	35	50	30
4	17	34	16	48	27	21	70	40
5	19	38	19	57	28	14	65	45
6	14	28	15	45	27	21	70	40
7	18	36	17	51	25	35	50	30
8	20	40	20	60	27	21	70	40
9	15	30	30	90	32	24	60	45
10	19	38	19	57	27	21	70	40
11	14	28	15	45	25	35	50	30
12	15	30	14	42	27	21	70	40
13	19	38	19	57	25	35	50	30
14	18	36	17	51	25	35	50	30
15	14	28	15	45	27	21	70	40
16	20	40	20	60	30	40	60	35
17	17	34	16	48	28	14	65	45
18	18	36	17	51	32	24	60	45
19	19	38	19	57	25	35	50	30
20	14	28	15	45	25	35	50	30

ПРАКТИЧНА РОБОТА №7

Динамічний аналіз механізму: зведена сила, зведена маса

Мета роботи: навчатись замінити складний механізм зведеною силою, масами

Теоретична частина

7.1 Загальні положення.

У динаміці механізмів і машин дуже широко використовується *метод зведення сил і мас* для розв'язання задач із визначення закону руху механізму, що знаходиться під дією прикладних до нього сил, з урахуванням мас ланок.

Даний метод спрощує рішення задач, оскільки рух ланок механізму зводиться до руху лише до однієї ланки. Ця ланка називається ланкою зведення, а точка до якої прикладається зведена сила називається точкою зведення.

Як правило, ланкою зведення вибирають початкову (вхідну) ланку механізму. У робочих машинах – головний вал, у машинах – двигунах вихідний вал.

7.2 Зведена сила і зведений момент сил

Для визначення зведених сил використовується рівність потужностей:

$$P_{\text{зв}} = \sum_{i=1}^N P_i .$$

де $P_{\text{зв}}$ - потужність, яку розвиває зведена сила $F_{\text{зв}}$, або зведений момент $M_{\text{зв}}$, які прикладаються до ланки зведення; P_i – потужність, що розвивають сили та моменти пар сил i – их ланок механічної системи.

Зведена сила визначається так:

$$F_{36} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i}{v_A} = \frac{\sum_{i=1}^N F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^N M_i \omega_i}{v_A}, \quad (7.1)$$

де F_i - сили, прикладені до i -их ланок механічної системи; v_i - швидкість точки прикладання; α_i - кут між напрямком векторів F_i і v_i ; M_i - моменти сил, прикладені до i - ої ланки механічної системи; ω_i - кутова швидкість i - ої ланки точки зведення; v_A - швидкість точки зведення.

Зведений момент сил дорівнює:

$$M_{36} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i}{\omega_1} = \frac{\sum_{i=1}^N F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^N M_i \omega_i}{\omega_1}, \quad (7.2)$$

де ω_1 - кутова швидкість ланки зведення.

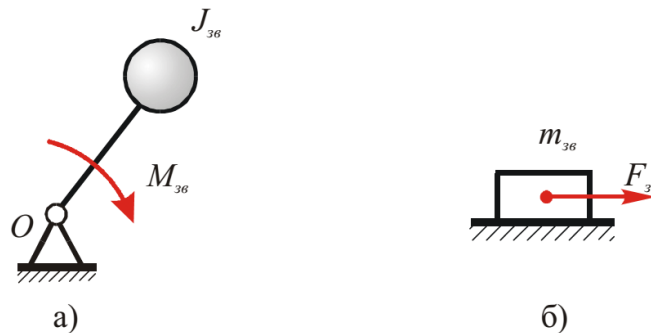


Рис.7.1 Динамічні моделі механізму:

а - з обертальною ланкою зведення; б - з поступально рухомою ланкою зведення

Між зведеною силою і зведеним моментом існує такий зв'язок:

$$M_{36} = F_{36} \cdot l_{OA},$$

де l_{OA} - коротка відстань від точки зведення до центра обертання ланки зведення.

7.3 Зведена маса і зведений момент інерції

При динамічному дослідженні руху механічних систем широко використовується зведена маса (m_{36}) і зведений момент інерції ($J_{36} = I_{36}$).

Зведена маса – це маса, кінематична енергія якої дорівнює кінетичній енергії всіх ланок механічної системи.

$$m_{зв} = 2 \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{v_A^2} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^N I_i \omega_i^2}{v_A^2} . \quad (7.3)$$

Зведений момент інерції

$$I_{зв} = 2 \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{\omega_A^2} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^N I_i \omega_i^2}{\omega_A^2} . \quad (7.4)$$

де $\sum_{i=1}^N T_i$ - миттєва, сумарна кінетична енергія i - ої механічної системи.

Величини $I_{зв}$ і $m_{зв}$ зв'язані наступною рівністю:

$$I_{зв} = m_{зв} \cdot l_{OA}^2 .$$

З наведених формул видно, що зведена сила, зведений момент сили, або зведена маса, зведений момент інерції залежить від положення ланки зведення, тобто вони являються функцією узагальненої координати.

Моменти інерції ланок механізмів можна визначити за формулою:

$$I_i = 0,17 \cdot m_i \cdot l_i^2 .$$

де i - номер ланки.

7.4 Приклади на визначення зведеної сили і моменту сил

Приклад 1. На ланки чотириланкового механізму $OABC$ (рис. 7.2) діє сила $F_2 = 200H$ і момент пари сил $M_3 = 1,5Hm$, план швидкостей механізму відомий. Визначити зведену силу і зведений момент сил, який прикладений до ланки OA , якщо $l_{OA} = 0,1m, l_{AB} = l_{BC} = 0,4m, \alpha = 45^\circ$.

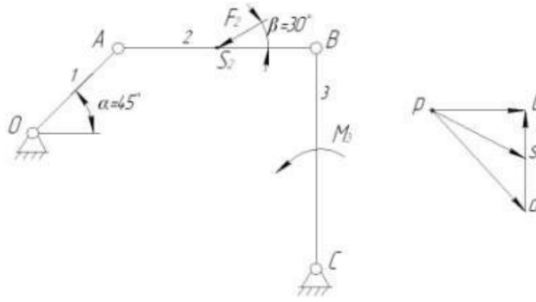


Рис.7.2 Визначення зведеної сили і зведеного моменту

Рішення

1. Для заданого положення механізму запишемо рівняння потужності:

$$P_{\text{мех}} = P_1 + P_2 + P_3 = F_2 \cdot v_{S_2} \cdot \cos(F_2 \cdot v_{S_2}) + M_3 \omega_3.$$

2. Потужність ланки зведення буде:

$$P_{3\phi} = F_{3\phi} \cdot v_A.$$

3. Зведена сила прикладена в точці і величина її буде:

$$F_{3\phi} = \frac{(PS_2)}{(Pa)} \cdot F_2 \cdot \cos(F_2 \cdot v_{S_2}) + \frac{\omega_3}{v_A} \cdot M_3 = \frac{20}{27} \cdot 200 \cdot \cos 60^\circ + \frac{17}{27 \cdot 0,4} \cdot 1,5 = 76,52 \text{ H}$$

4. Зведений момент сил буде:

$$M_3 = F_{3\phi} \cdot l_{OA} = 76,52 \cdot 0,4 = 30,608 \text{ H} \cdot \text{м}$$

Приклад 2. Для кривошипно-повзункового механізму (рис.7.3) визначити приведену до осі шарніра зведену масу і зведений до ланки момент інерції. План швидкостей відомий. Дано: $l_{OA} = 0,02 \text{ м}$, $l_{AB} = 0,05 \text{ м}$, $l_{AS} = 0,02 \text{ м}$,

$$\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}, I_1 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, m_2 = 0,1 \text{ кг}, m_3 = 0,5 \text{ кг}, I_{S_2} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

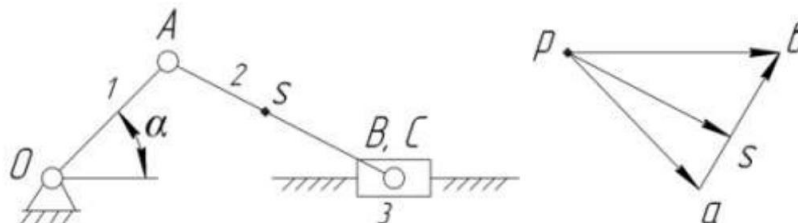


Рис.7.3 Визначення приведеної маси та моменту інерції

Рішення

1. Зведену масу визначаємо так:

$$m_{36} = 2 \frac{T_1 + T_2 + T_3}{v_A^2}.$$

T_1, T_2, T_3 – відповідно кінематична енергія ланок 1, 2, 3. Запишемо для цих ланок формули для визначення кінетичної енергії.

$$T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{I_1 v_A^2}{2 l_{OA}^2};$$

$$T_2 = \frac{I_{s2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{s2}^2}{2} = \frac{I_{s2} v_{BA}^2}{2 l_{BA}^2} + \frac{m_2 v_{s2}^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_B^2}{2}.$$

2. Скориставшись планом швидкостей визначимо зведену масу:

$$\begin{aligned} m_{36} &= \frac{I_1}{l_{OA}^2} + \frac{I_{s2}}{l_{AB}^2} \cdot \left(\frac{ab}{pa} \right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{ps}{pa} \right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{pb}{pa} \right)^2 = \\ &= \frac{0,00008}{(0,02)^2} + \frac{0,00004}{(0,05)^2} \cdot \left(\frac{24}{38} \right)^2 + 0,1 \cdot \left(\frac{35}{38} \right)^2 + 0,5 \cdot \left(\frac{37}{38} \right)^2 = 0,3042_{кг} \end{aligned}$$

7.5 Завдання для самостійної роботи

Визначити зведений до валу кривошипу момент M_{36} від сили F_3 , що діє на поршень дизельного двигуна (рис.7.4) і зведений до того ж валу момент інерції I_{36} від маси поршня, якщо значення $m_3, l_{OA}, l_{AB}, \alpha$ та F_3 відповідають значенням таблиці 7.1.

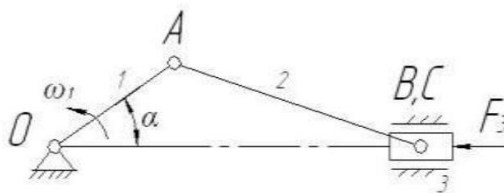


Рис.7.4 Визначення зведеного моменту

Таблиця 7.1 Завдання для самостійної роботи

Варіант	m_3	l_{OA}	l_{AB}	$F_3, \text{Н}$	α°
1	2	3	4	5	6
1	5кг	0,1м	0,5м	50	30
2	6кг	0,15м	0,75м	60	40

1	2	3	4	5	6
3	7кг	0,2м	0,7м	70	50
4	8кг	0,1м	0,45 м	80	30
5	4кг	0,2м	0,55 м	90	40
6	5кг	0,3м	0,9 м	50	50
7	6кг	0,17м	0,65 м	60	30
8	7кг	0,2м	0,5 м	70	40
9	8кг	0,15м	0,5 м	80	50
10	9кг	0,2м	0,8 м	90	30
11	6кг	0,3м	0,4 м	50	40
12	7кг	0,15м	0,5 м	60	50
13	8кг	0,2м	0,5 м	70	30
14	5кг	0,1м	0,3 м	80	40
15	6кг	0,15м	0,45 м	90	50
16	7кг	0,3м	0,9 м	50	30
17	8кг	0,12м	0,48м	60	40
18	5кг	0,14м	0,42 м	70	50
19	6кг	0,13м	0,47 м	80	30
20	7кг	0,2м	0,48 м	90	40

7.6 Контрольні питання

1. Зведена сила, зведений момент сил.
2. Зведена маса і зведений момент інерції.
3. Схема розрахунки зведеної сили, моменту сил.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №8

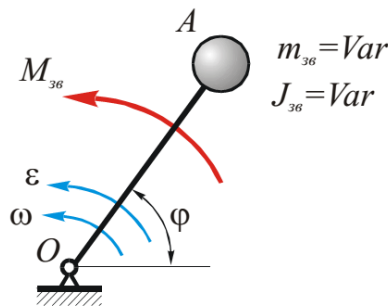
Рівняння руху в інтегральній та диференціальній формі, визначення моменту інерції маховика

Мета роботи: навчитись складати рівняння руху, за допомогою якого визначати момент інерції маховика.

Теоретична частина

8.1 Рівняння руху в інтегральній та диференціальній формі.

Розглянемо динамічну модель механізму з одним ступенем рухливості (рис.8.1).



8.1 Динамічна модель механізму з одним ступенем рухливості

Згідно з теоремою про зміну енергії, можна записати:

$$T - T_0 = \sum A.$$

Тут T – кінетична енергія механізму в даний момент часу; T_0 – початкова кінетична енергія; $\sum A$ – сумарна робота, яку виконують всі активні сили і сили тертя в кінематичних парах.

а) Рівняння руху в інтегральній формі.

Для моделі (рис.8.1).

$$\sum A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{36} d\varphi,$$

а тому

$$\Delta T = \frac{J_{36} \omega^2}{2} - \frac{J_{360} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{36} d\varphi \quad (8.1)$$

Верхня границя φ – в загальному випадку змінна. Якщо навантаження залежить тільки від положення механізму, то M_{36} є функцією лише узагальненої координати φ . Розв'язуючи це рівняння відносно ω , отримаємо:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{36}(\varphi) d\varphi}{J_{36}} + \frac{J_{360}}{J_{36}} \omega_0^2} \quad (8.2)$$

У виразі M_{36} потрібно урахувати знак.

б) Рівняння руху в диференціальній формі.

Диференціюємо рівняння (8.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_{36} \omega^2}{2} \right) &= M_{36}, \\ \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_{36} \omega^2}{2} \right) &= \frac{dJ_{36}}{d\varphi} \frac{\omega^2}{2} + \omega J_{36} \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = J_{36} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{36}}{d\varphi} \omega^2. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$J_{36} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{36}}{d\varphi} \omega^2 = M_{36} \quad (8.3)$$

Це і є рівняння руху в диференціальній формі, оскільки шукана змінна ω стоїть під знаком похідної. В цьому рівнянні M_{36} і J_{36} слід брати з урахуванням знаку. Для механізмів, у яких $J_{36} = const$, наприклад фрикційні зубчасті механізми з круглими колесами, рівняння (8.3) спрощується:

$$J_{36} \frac{d\omega}{dt} = M_{36} \quad (8.4)$$

Розв'язавши рівняння (8.4) відносно ω , можна знайти і кутове прискорення ланки зведення:

$$\varepsilon = \frac{M_{36}}{J_{36}} - \frac{\omega^2}{2J_{36}} \frac{dJ_{36}}{d\varphi}.$$

8.2 Визначення моменту інерції маховика

Рух машинного агрегату буде усталеним, якщо швидкість всіх його точок періодично буде приймати одне і теж значення. При усталеному русі сума робіт всіх сил за один цикл головного валу дорівнює нулю. В циклі кутова швидкість головного валу коливається від максимального до мінімального значень. Ця зміна залежить від зміни зведеного моменту інерції і зведених моментів рушійних сил та сил опору. Для того, щоб зміна кутової швидкості знаходилась в заданих межах на головний вал встановлюють маховик.

Задача вибору маховика формується так: рух машини усталений, задано сили, котрі діють на машину, і залежність зведеного моменту інерції від кута повороту головного валу. Необхідно знайти момент інерції маховика, так щоб забезпечити рух машини з заданим коефіцієнтом нерівномірності ходу.

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}},$$

де ω_{\max} і ω_{\min} – максимальна і мінімальна кутова швидкість головного валу. Чим менша ступінь нерівномірності, тим ближче реальна машина до ідеальної.

При визначенні моменту інерції маховика часто буває необхідно визначити максимальну і мінімальну швидкості головного валу. Для цього використовуються наступні вирази:

$$\omega_{\max} = \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right), \omega_{\min} = \omega_{cp} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

При рішенні задачі про рух механізму з однією ступеню вільності необхідно користуватись рівнянням кінетичної енергії в диференціальній формі:

$$M_p d\varphi - M_o d\varphi = dT,$$

де M_p - зведений момент рушійних сил, M_o - зведений момент сил опору, φ - кут повороту ланки зведення. T - кінетична енергія ланки зведення, яка дорівнює:

$$T = \frac{J_{зб} \omega^2}{2}.$$

Рівняння руху машинного агрегату з урахуванням зміни кінетичної енергії:

$$M_p - M_o = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_{зб} \omega^2}{2} \right)$$

Рівняння руху машинного агрегату в енергетичній формі:

$$A_p - A_o = A_{зб} = \frac{J_{\max} \omega_{\max}^2}{2} - \frac{J_{\min} \omega_{\min}^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зб} d\varphi.$$

де J_{\max} , J_{\min} - відповідно зведені моменти інерції у максимальному і мінімальному положенні головного валу, ω_{\max} , ω_{\min} - максимальна і мінімальна кутові швидкості головного валу.

Збиткова робота за один кінематичний цикл роботи машинного агрегату визначається шляхом інтегрування зведених моментів рушійних сил і сил опору

$$\Delta T = A_{зб} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_p - M_o) d\varphi.$$

Момент інерції машинного агрегату складається з власного моменту інерції механізму і моменту інерції маховика:

$$J_{\max} = J_m + J_{o\max}; J_{\min} = J_m + J_{o\min}.$$

Тоді

$$A_{зб} = \frac{(J_m + J_{o\max}) \omega_{cp}^2 (1 + \delta)}{2} - \frac{(J_m + J_{o\min}) \omega_{cp}^2 (1 - \delta)}{2}.$$

Момент інерції маховика визначається за формулою:

$$J_M = \frac{A_{\text{ж}}}{\delta \omega_{\text{cp}}^2}.$$

8.3 Приклади на визначення моменту інерції маховика

Приклад 1. Визначити момент інерції маховика, який необхідно встановити на валу машинного агрегату, щоб забезпечити коефіцієнт нерівномірності обертання $\delta = 0,02$. Середня швидкість обертання вала в усталеному русі $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$. Момент усіх зведених сил $M_{\text{ж}} = 20 \cdot \cos \varphi (\text{Н} \cdot \text{м})$.

Зведений момент інерції постійний $J_{\text{ж}} = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Рішення

1 Запишемо диференціальне рівняння руху машинного агрегату:

$$M_{\text{ж}} = J_{\text{ж}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{dJ_{\text{ж}}}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

Для даної задачі

$$J_{\text{ж}} = \text{const}, \frac{dJ_{\text{ж}}}{d\varphi} = 0,$$

Отже,

$$M_{\text{ж}} = J_{\text{ж}} \frac{d\omega}{dt} = J_{\text{ж}} \varepsilon.$$

2. В положеннях, де $\omega = \omega_{\text{max}}, \omega = \omega_{\text{min}}$ кутове прискорення ε . Це означає, що кутове прискорення ланки в цьому положенні відсутнє, а значить $M_{\text{ж}} = 20 \cdot \cos \varphi = 0$. Тобто в положеннях ланки $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ збитковий момент $M_{\text{ж}} = 0$. Кутова швидкість в положенні $\varphi = \frac{\pi}{2}$ набуде свого максимального значення $\omega_a = \omega_{\text{max}}$. В положенні $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ кутова швидкість буде мінімальною $\omega_o = \omega_{\text{min}}$.

3. Визначимо зміну кінетичної енергії після встановлення маховика під час переходу головного вала з положення, де $\omega_a = \omega_{\text{max}}$ в положення, де

$$\omega_{\delta} = \omega_{\min}.$$

$$\Delta A_{\delta-a} = (J_{\text{зв},a} + J_{\text{м}}) \frac{\omega_{\max}^2}{2} - (J_{\text{зв},\delta} + J_{\text{м}}) \frac{\omega_{\min}^2}{2}.$$

За цієї формулою визначимо момент інерції маховика:

$$J_{\text{м}} = \frac{2\Delta A_{\delta-a} - J_{\text{зв},a} \omega_{\max}^2 + J_{\text{зв},\delta} \omega_{\min}^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}.$$

У відповідності до умови задачі $J_{\text{зв},a} = J_{\text{зв},\delta} = J_{\text{зв}} = 2,0 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Вираз, що знаходиться в знаменнику $\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = 2 \cdot \delta \cdot \omega_{cp}^2$. Тоді

$$J_{\text{м}} = \frac{2\Delta A_{\delta-a}}{\delta \cdot \omega_{cp}^2} - J_{\text{зв}}.$$

Визначимо збиткову роботу

$$\Delta A_{\delta-a} = \int_{\varphi_{\delta}}^{\varphi_a} M_{\text{зв}} d\varphi = 20 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тоді

$$J_{\text{м}} = \frac{40}{10^2 \cdot 0,02} - 2 = 18 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Приклад 2. Визначити момент інерції велосипедного колеса, якщо діаметр колеса 670 мм. Маса колеса разом із покришкою становить $m = 1,3 \text{ кг}$.

Рішення. Момент інерції можна визначити із такого рівняння:

$$J_{\text{м}} = R^2 \sum_{i=1}^n \Delta m_i = M \cdot R^2.$$

Або

$$J_{\text{м}} = \frac{md^2}{4} = \frac{1,3 \cdot 0,67^2}{4} = 0,15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

8.4 Завдання для самостійної підготовки

Визначити момент інерції маховика машинного агрегату при його усталеному режимі руху. Всі сили і маси машинного агрегату зведені до головного валу.

Зведений момент інерції $J_{зг}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$, при цьому один цикл руху машинного агрегату відповідає одному повороту головного валу, тобто φ . Зведений момент сил опору представлений на рис. 8.2. Зведений момент рушійних сил в циклі постійний $M_{p.зг} = \text{const}$. Середня кутова швидкість кривошипу ω_{cp} . Коефіцієнт нерівномірності обертання головного валу δ . Числові дані для розрахунк згідно варіантів наведено у таблиці 8.1.

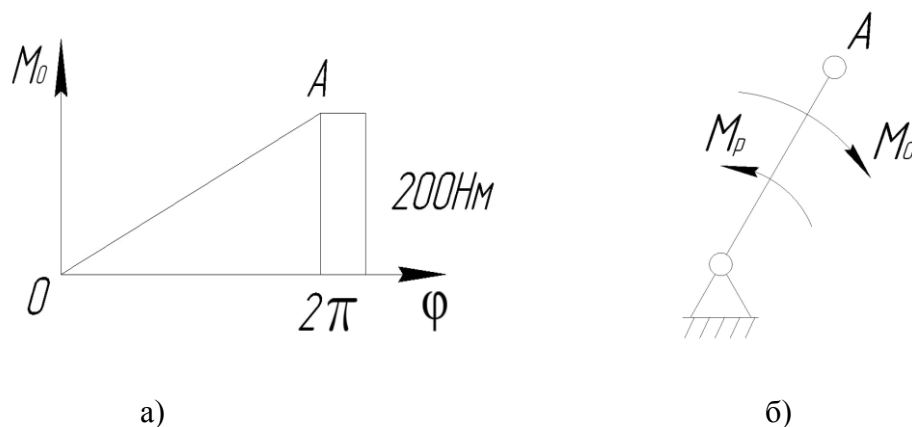


Рис.8.2 Визначення моменту інерції маховика

Таблиця 8.1 Варіанти для самостійной роботи

Варіант	$J_{зг}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\varphi, \text{рад}$	$\omega_{cp}, \text{рад/с}$	δ
1	2	3	4	5
1	4	2π	25	0,05
2	5	π	30	0,06
3	6	$1,5\pi$	40	0,07
4	7	2π	50	0,05
5	8	π	50	0,06
6	9	$1,5\pi$	70	0,07
7	10	2π	30	0,05
8	11	π	40	0,06
9	12	$1,5\pi$	50	0,07

1	2	3	4	5
11	14	π	30	0,06
12	15	$1,5\pi$	40	0,07
13	8	2π	50	0,05
14	9	π	25	0,06
15	10	$1,5\pi$	30	0,07
16	11	2π	40	0,05
17	12	π	50	0,06
18	13	$1,5\pi$	50	0,07
19	14	2π	40	0,05
20	15	π	50	0,06

8.5 Контрольні запитання

1. Рівняння руху в інтегральній формі.
2. Рівняння руху в диференціальній формі.
3. Формула для визначення моменту інерції маховика.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №9

Статичне врівноваження механізмів

Мета роботи: визначення противаг механізму для його статичної рівноваги.

Теоретична частина

9.1 Загальні положення

У цьому випадку домагаються виконання умови:

$$\vec{F}_{a\Sigma} = \vec{0}.$$

В результаті усувається динамічна дія сил інерції на фундамент (але дія моментів зберігається). Можна записати:

$$\vec{F}_{a\Sigma} = -m_{\Sigma}\vec{a}_S.$$

Тут m_{Σ} — сумарна маса усіх рухомих ланок; \vec{a}_S — прискорення центру мас системи. Тобто статичне врівноваження досягається за умови, що центр мас системи буде нерухомим.

Із теоретичної механіки відомо, що за плоско-паралельного руху тіло можна представити у вигляді двох зосереджених мас (рис. 9.1), що задовольняють умовам:

$$\begin{cases} m = m_A + m_B, \\ m_A l_{AS} = m_B l_{BS} \end{cases} \quad (9.1)$$

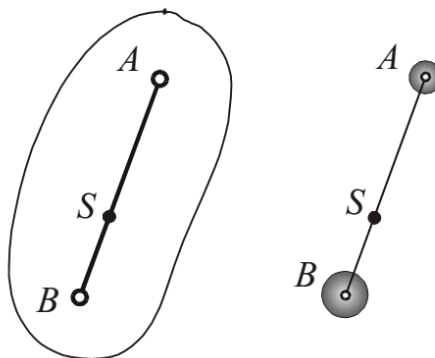


Рис. 9.1 Тіло та його модель

Друга умова свідчить, що центр мас S міститься в тому ж місці. А значить головний вектор сил інерції змінної системи дорівнює головному вектору сил інерції заданого тіла. Однак головні моменти сил інерції не збігаються, але для статичного зрівноважування це ролі не грає.

Виконаємо статичне врівноважування шарнірного чотириланкового механізму (рис.9.2). Вважатимемо заданими маси ланок m_1, m_2, m_3 і їх довжини l_1, l_2, l_3 . S – центр мас механізму. Замінімо кожну ланку двома зосередженими масами (рис. 9.2 б). Для ланки 1, користуючись умовою (9.1), можна записати:

$$\begin{cases} m_1 = m_0 + m_{A1}, \\ m_0 l_{SO1} = m_{A1} l_{AS1} \end{cases}$$

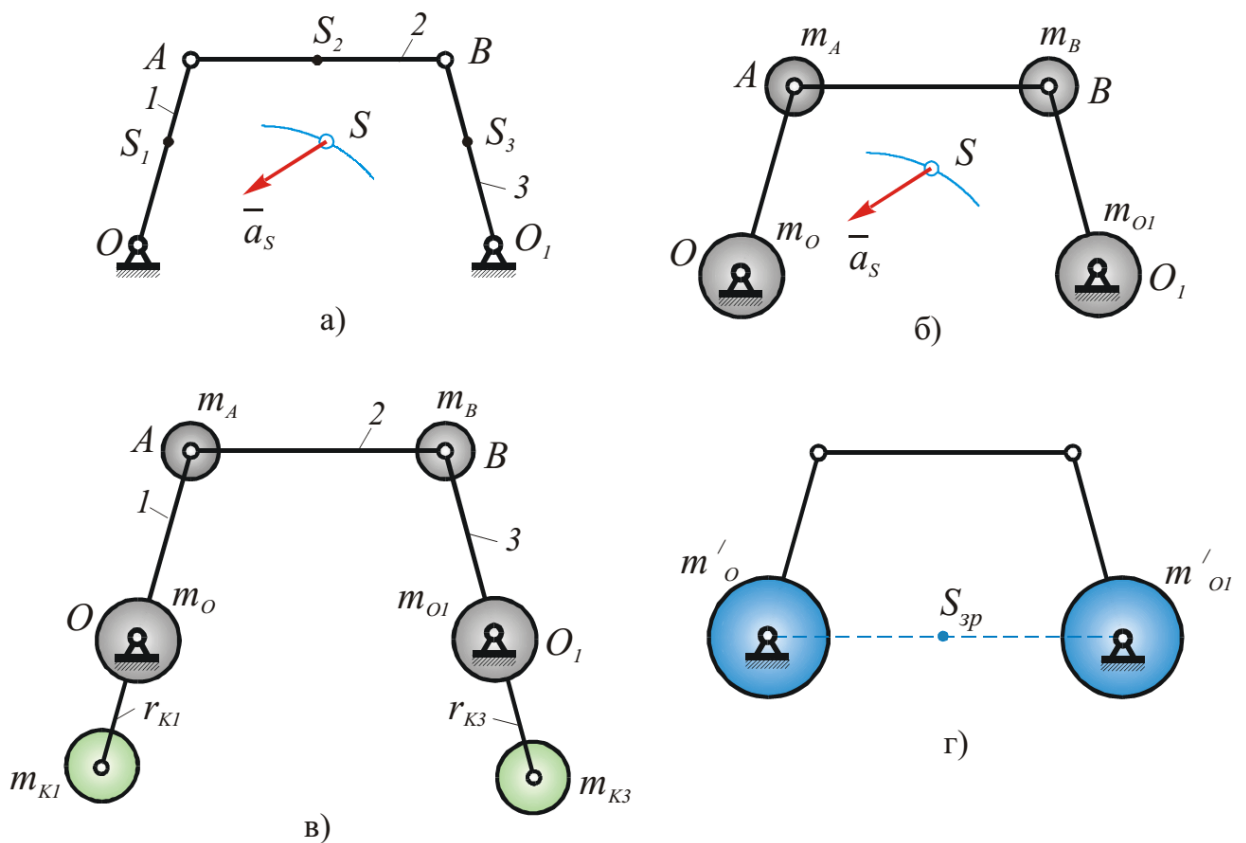


Рис.9.2 Статичне врівноважування чотириланкового механізму: вихідна схема (а); еквівалентні схеми (б, в, г)

Звідси

$$m_1 = m_0 + m_0 \frac{l_{SO1}}{l_{AS1}} = m_0 \left(\frac{l_1}{l_{AS1}} \right); \quad m_1 = m_{A1} + m_{A1} \frac{l_{AS1}}{l_{SO1}} = m_0 \left(\frac{l_{SO1}}{l_1} \right).$$

Остаточно отримаємо співвідношення:

$$m_0 = m_1 \frac{l_{AS1}}{l_1}; m_{A1} = m_1 \frac{l_{OS1}}{l_1}.$$

За аналогією:

$$m_{A2} = m_2 \frac{l_{BS2}}{l_2}; m_{B2} = m_2 \frac{l_{AS2}}{l_2}.$$

$$m_{B3} = m_3 \frac{l_{OS3}}{l_3}; m_{O1} = m_3 \frac{l_{BS3}}{l_3}.$$

Таким чином, механізм замінений чотирма масами $m_0, m_A = m_{A1} + m_{A2}, m_B = m_{B1} + m_{B2}, m_{O1}$. Центр мас механізму залишається у тому ж місці і рухається прискорено (рис. 9.2 б).

На ланках 1 і 3 розмістимо противаги m_{K1}, m_{K3} (рис.9.2в), таким чином, щоб спільні центри мас двомасових систем $[m_A, m_{K1}], [m_B, m_{K3}]$ опинилися в точках O, O_1 відповідно. Для цього мають виконуватись умови:

$$\begin{cases} m_A l_1 = m_{K1} r_{K1} \\ m_B l_3 = m_{K3} r_{K3} \end{cases} \quad (9.2)$$

Об'єднаємо маси на 1-й і 3-й ланках:

$$m'_O = m_A + m_{K1} + m_O; m'_{O1} = m_B + m_{K3} + m_{O1}.$$

Тобто після постановки противаг, що задовільняють умові (9.2), механізм можна подати у вигляді двох нерухомих мас m'_O і m'_{O1} .

Отже центр мас механізму з балансирами m_{K1} і m_{K3} стає *нерухомим* (рис. 9.2 г). Маса балансирів m_{K1} і m_{K3} підбирають за умовами (9.2), задаючись радіусами r_{K1} і r_{K3} .

9.2 Приклади на зрівноваження

Приклад 1. Визначити маси противаг, які необхідно встановити на продовженні ланок A і C шарнірного чотириланкового механізму (рис. 9.3),

якщо: $l_{OA} = 0,1\text{м}$, $l_{AB} = 0,3\text{м}$, $l_{BC} = 0,25\text{м}$; $m_1 = 1\text{кг}$, $m_2 = 2\text{кг}$, $m_3 = 3\text{кг}$;

$l_{OS_1} = 0,02\text{м}$, $l_{AS_2} = 0,1\text{м}$, $l_{BS_3} = 0,1\text{м}$. Противаги необхідно встановити на відстані:

$r_1 = 0,05\text{м}$; $r_3 = 0,1\text{м}$.

Рішення. 1. Визначаємо маси, які будуть зосереджені в точках A і B .

$$m_B = m_2 \frac{l_{AS_2}}{l_{AB}} = 3 \cdot \frac{0,1}{0,3} = 1\text{кг}, m_A = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{AB}} = 3 \cdot \frac{0,2}{0,3} = 2\text{кг}$$

На продовженні кривошипа і коромисла встановлюємо дві противаги: m_{n1} і

m_{n3} .

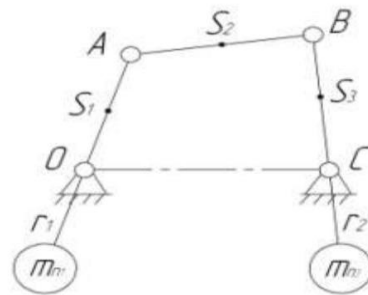


Рис.9.3 Визначення мас противаг

2. Визначаємо маси противаг m_{n1} і m_{n3} з урахуванням мас m_1, m_3, m_A і m_B :

$$m_{n1} = \frac{m_A l_{OA} + m_1 l_{OS_1}}{r_1} = \frac{2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,02}{0,05} = 4,4\text{кг},$$

$$m_{n3} = \frac{m_B l_{BC} + m_3 l_{CS_3}}{r_3} = \frac{1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,15}{0,1} = 4,0\text{кг}.$$

Приклад 2. Визначити маси противаг m_{n1} і m_{n2} , які необхідно встановити на кривошипі OA і шатуні AB кривошипно-повзункового механізму з метою його статичного зрівноваження (рис. 9.4). Дано:

$m_1 = 1\text{кг}$, $m_2 = 5\text{кг}$, $m_3 = 1\text{кг}$, $l_{OA} = 0,1\text{м}$, $l_{AB} = 0,3\text{м}$, $l_{OS_1} = 0,05\text{м}$, $l_{OS_2} = 0,15\text{м}$.

Противаги встановити на продовженні ланок OA і AB на відстані $0,1\text{м}$.

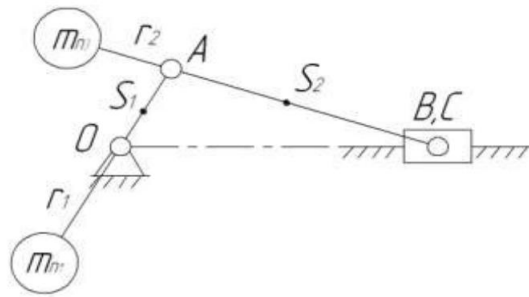


Рис.9.4 Визначення мас противаг

Рішення. 1. Визначаємо маси зосереджені в точках O , A і B .

$$m_O = m_1 \frac{l_{OA} - l_{OS1}}{l_{OA}} = 1 \cdot \frac{0,1 - 0,05}{0,1} = 0,5 \text{ кг}$$

$$m_A = m_1 \frac{l_{OS1}}{l_{OA}} + m_2 \frac{l_{BS2}}{l_{AB}} = 1 \cdot \frac{0,05}{0,1} + 5 \cdot \frac{0,15}{0,3} = 3 \text{ кг}$$

$$m_B = m_2 \frac{l_{AS2}}{l_{AB}} + m_3 = 5 \cdot \frac{0,15}{0,3} + 3 = 5,5 \text{ кг}$$

2. Визначимо масу противаги m_{n2} без урахування маси m_2 :

$$m_{n2} = m_B \frac{l_{OA}}{r_1} = 3 \cdot \frac{0,1}{0,1} = 3 \text{ кг}$$

3. Визначимо масу противаги m_{n2} , яку необхідно встановити на продовженні ланки AB :

$$m_{n2} = m_B \frac{l_{AB}}{r_2} = 5,5 \cdot \frac{0,3}{0,1} = 16,5 \text{ кг}$$

4. Визначимо масу противаги m_{n1} з урахуванням m_{n2}, m_A, m_B

$$m_{n1} = \frac{m_B + m_A + m_{n2}}{r_1} = \frac{5,5 + 3 + 16,5}{0,1} = 25 \text{ кг}$$

9.3 Завдання для самостійної роботи

Виконати статичне зрівноваження шести ланкового механізму (рис. 9.5).

Числові значення мас m_1, m_3, m_4, m_5 та довжин $l_{OA}, l_{CD}, l_{OS1}, l_{CS3}, l_{DE}, l_{DS4}$ наведені згідно варіантів у таблиці 9.1.

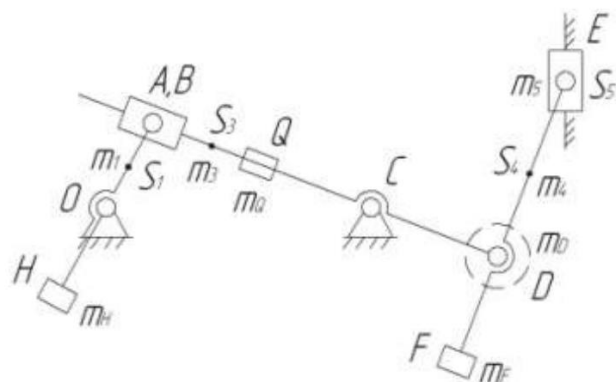


Рис.9.5 Статичне зрівноваження шести ланкового механізму

Таблиця 9.1 Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант	m_1 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	m_5 , кг	l_{OA} , м	l_{CD} , м	l_{OS_1} , м	l_{CS_3} , м	l_{DE} , м	l_{DS_4} , м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3,6	13,2	4,8	6,0	0,3	0,2	0,15	0,35	0,4	0,2
2	3,7	13,8	5,0	6,2	0,4	0,25	0,17	0,4	0,5	0,25
3	4,8	6,0	7,0	8,0	0,35	0,4	0,2	0,25	0,17	0,4
4	4,8	6,0	13,2	4,8	0,17	0,4	0,5	0,2	0,15	0,5
5	5,0	6,2	13,8	5,0	0,25	0,17	0,4	0,25	0,17	0,17
6	13,8	5,0	3,7	13,8	0,4	0,17	0,4	0,5	0,25	0,15
7	6,0	7,0	4,8	6,0	0,25	0,25	0,17	0,4	0,5	0,17
8	4,8	6,0	6,2	13,8	0,2	0,4	0,2	0,25	0,17	0,25
9	5,0	6,2	5,0	3,7	0,25	0,17	0,4	0,5	0,25	0,5
10	5,0	6,2	13,8	6,2	0,17	0,25	0,17	0,4	0,5	0,17
11	13,8	5,0	3,7	8,0	0,25	0,17	0,4	0,5	0,25	0,5
12	6,0	7,0	4,8	4,8	0,4	0,5	0,25	0,17	0,4	0,5
13	13,8	5,0	3,7	13,8	0,25	0,17	0,4	0,2	0,25	0,17
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
14	6,0	7,0	4,8	6,0	0,17	0,4	0,6	0,4	0,2	0,25
15	4,8	6,0	6,2	13,8	0,25	0,17	0,4	0,5	0,25	0,3
16	6,0	7,0	4,8	6,0	0,17	0,17	0,4	0,6	0,25	0,17
17	13,8	5,0	3,7	13,8	0,5	0,25	0,17	0,4	0,5	0,2
18	6,0	7,0	4,8	6,0	0,17	0,4	0,2	0,25	0,17	0,4
19	5,0	4,8	6,0	6,2	0,25	0,17	0,4	0,5	0,25	0,5
20	7,0	5,0	6,2	5,0	0,4	0,6	0,5	0,25	0,17	0,17

9.4 Контрольні питання

1. Умови статичного рівноваження механізмів.
2. Заміна реального тіла зосередженими масами.
3. Визначення мас противаг.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №10

Зубчасті передачі та їх класифікація

Мета роботи: навчитись розраховувати основні геометричні параметри зубчастих передач.

Теоретична частина

10.1 Загальні положення

Зубчастими передачами називаються механізми з вищими кінематичними парами які утворені зубчастими колесами. Вони використовуються для передавання обертового руху від одного вала до другого. Зубчасті передачі бувають прості і складні. Прості зубчасті передачі – трьохланкові механізми, які складаються із двох зубчастих коліс і стояків, в яких зубчасті колеса утворюють між собою вищу кінематичну пару, а з стояками – нижчі.

Зубчастим колесом називається ланка з замкнутою системою зубців, що забезпечує за повний оберт безперервність обертового руху. Менше колесо в передачі називається *шестернею*, а всі інші *зубчастими колесами*.

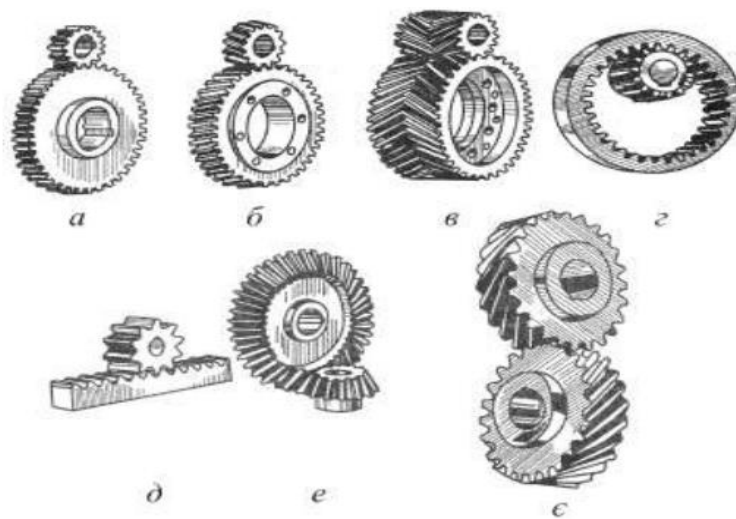


Рис.10.1 Зубчасті передачі: циліндрічні: а), б), в), г), д); е) - конічні; ж) - гіперболічні

У залежності від розташування осей валів у просторі прості зубчасті передачі класифікуються:

- передачі з паралельними осями;
- передачі з осями які перетинаються;
- передачі осі яких схрещуються.

10.2 Основні геометричні розміри стандартного евольвентного зубчастого колеса

Розміри зубчастих коліс зручно виражати через кількість зубців z і модуль m .

$$m = \frac{d}{z}, \text{ або } m = p / \pi.$$

Модуль m – це довжина (у мм), яка припадає по діаметру ділильного кола d на один зуб колеса (фізичний зміст); геометричний зміст – це стандартизація ірраціонального числа π , яке входить у формулу по визначенню діаметра ділильного кола d . Для визначення геометричних параметрів зубчастого колеса справедливі наступні співвідношення:

- 9) висота головки зуба $h_a = m$;
- 10) висота ніжки зуба $h_f = 1,25m$, більший розмір ніжки зуба по
- 11) відношенню до головки зуба, забезпечує в зачепленні зазор між поверхнею вершин першого колеса і поверхнею западин другого (радіальний зазор c);
- 12) товщина зуба по ділильному колу дорівнює ширині западини $S = e = \pi m / 2$;
- діаметр кола вершин $d_a = m \cdot (z \pm 2)$;
- діаметр кола западин $d_f = m \cdot (z \mp 2,5)$;

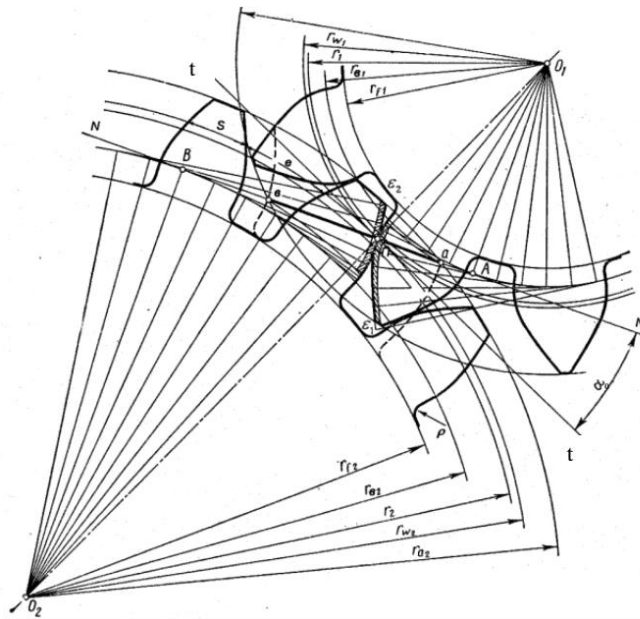


Рис.10.2 Евольвентне зубчасте зачеплення

- крок зачеплення $p = \pi \cdot m$;
- радіальний зазор $c = 0,25 \cdot m$;
- діаметр ділильного кола $d = m \cdot z$;
- відстань між центрами $a = 0,5m \cdot (z_1 + z_2)$.

У формулах верхні знаки вказують на зовнішнє зачеплення, а нижні — на внутрішнє.

10.3 Проектування зубчастої передачі

При проектуванні зубчастої передачі виникає питання про вибір коефіцієнта зміщення x , який визначає положення ділильної прямої рейки (різального інструменту) відносно ділильного кола заготовки зубчастого колеса.

У верстатному зачепленні ділильна пряма може займати різні положення по відношенню до ділильного кола колеса: а) вона може дотикатися до ділильного кола ($x = 0$) — нульове встановлення інструменту; б) зміщена

від центра заготовки на величину $\Delta = +xm$ – додатне зміщення; в) зміщена до центра заготовки $\Delta = -xm$ – від’ємне зміщення.

Зубчасті колеса, при нарізанні яких ділильна пряма рейки дотична до ділильного кола, отримали назву нульових ($x = 0$). При додатному зміщенні $xm > 0, x > 0$. При від’ємному $-xm < 0, x < 0$.

Від коефіцієнта зміщення надто сильно залежать якісні показники передачі: плавність і безшумність зачеплення, можливе зношування і міцність зубців. Крім того, додатнім зміщенням рейки можна позбутися від такого явища як підрізання ніжки зуба, яке виникає при числі зубців менше $z_{\min} = 17$. Коефіцієнт зміщення, при якому усувається підрізання ніжки зубця визначається:

$$x_{\min} = \frac{17 - z}{17}.$$

У залежності від величини зміщення кожного колеса можна одержати три типи передач, що відрізняються розташуванням початкових і ділильних кіл.

В нульовій передачі $x_1 = x_2 = 0$ початкові і ділильні кола співпадають, кут зачеплення $\alpha = 20^\circ$, товщина зубців по ділильному колу дорівнює половині кроку зачеплення $a_{1,2} = 0,5m \cdot (z_1 + z_2)$.

Така передача може бути спроектованою тільки у випадку, коли $z_1 \geq 17, z_2 \geq 17$.

Формули для визначення основних розмірів нульових зубчастих коліс були наведені в пункті 10.2.

Щоб позбутися підрізання ніжки зуба, необхідно виконати зміщення інструмента. Якщо коефіцієнти зміщення рівні за величиною, але для меншого колеса – додатній, а для більшого колеса – від’ємний. Така передача можлива тільки тоді коли $z_1 + z_2 > 34$.

Таке корегування називається висотним (рівнозміщена передача). При

висотному корегуванні менше колесо корегується в плюс, а більше колесо в мінус причому $x_1 = -x_2$. Сумарний коефіцієнт корекції у даному випадку:

$$x_c = x_1 + x_2 = 0,$$

що означає що міжосьова відстань $a_{1,2}$ і кут зачеплення при висотному корегуванні не змінюються. Товщини зубців на ділительних колах різні у шестерні більші на $+2xm \cdot \operatorname{tg} 20^\circ$, а у колеса менша на $-2xm \cdot \operatorname{tg} 20^\circ$.

10.4 Кутове корегування

Якщо сумарний коефіцієнт корекції не дорівнює нулю: $x_c = x_1 + x_2 \neq 0$, така передача називається **рівнозміщеною** і може бути додатною якщо $x_c > 0$ і від'ємною, якщо $x_c < 0$.

10.5 Основні формули для визначення розмірів зубчастого зачеплення

1. Крок зачеплення по ділительному колу:

$$p = \pi \cdot m.$$

2. Радіуси ділительних кіл:

$$r_1 = mz_1 / 2, r_2 = mz_2 / 2.$$

3. Радіуси основних кіл:

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha_o, r_{b2} = r_2 \cos \alpha_o.$$

4. Монтажний кут зачеплення:

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha_o + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \tan \alpha_o,$$

де $\operatorname{inv} \alpha_o$ – інволюта α_o , визначається за таблицями інволют за кутом α_o .

5. Радіуси початкових кіл:

$$r_{w1} = r_1 \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha_w}, r_{w2} = r_2 \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha_w}.$$

6. Міжосьова відстань:

$$a_{1,2} = \frac{(z_1 + z_2) \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha_w},$$

7. Радіуси кіл западин зубців:

$$r_{f1} = r_1 - m(1,25 - x_1); r_{f2} = r_2 - m(1,25 - x_2).$$

8. Радіуси кіл вершин зубців:

$$r_{a1} = a_{1,2} - r_{f2} - 0,25m; r_{a2} = a_{1,2} - r_{f1} - 0,25m.$$

9. Товщина зубців на ділильному колі:

$$s_1 = 0,5p + 2x_1m \tan 20^\circ; s_2 = 0,5p + 2x_2m \tan 20^\circ.$$

У формули входить коефіцієнт зміщення, методи його визначення різні. При визначенні коефіцієнта зміщення використовується метод Кудрявцева.

10.6 Приклади на визначення основних геометричних параметрів зубчастих передач

Приклад 1. Визначити крок зачеплення по діаметру ділильного кола, якщо вимірюванням визначено, що $d_f = 175 \text{ мм}$, $z = 20$.

Рішення. Визначаємо модуль зубчастого колеса,

$$m = \frac{d_f}{z - 2,5} = \frac{175}{20 - 2,5} = 10 \text{ мм}.$$

Визначаємо крок зубчастого колеса по діаметру ділильного кола,

$$p = m \cdot \pi = 10 \cdot 3,14 = 31,4 \text{ мм}.$$

Приклад 2. Визначити міжцентрову відстань трьох ланкової зубчастої передачі із зовнішнім зачепленням зубців. Дано модуль $m = 10 \text{ мм}$, передаточне відношення, $i_{1,2} = 1,5$, число зубців на першому колесі, $z_1 = 14$.

Рішення. Визначаємо число зубців на другому колесі,

$$z_2 = i_{1,2} \cdot z_1 = 1,5 \cdot 14 = 21.$$

Радіуси ділильних кіл:

$$r_1 = mz_1 / 2 = 1 \cdot 14 / 2 = 7,0 \text{ мм}, r_2 = mz_2 / 2 = 1 \cdot 21 / 2 = 10,5 \text{ мм},$$

Радіуси основних кіл:

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha_0 = 7,0 \cdot 0,94 = 6,58 \text{ мм}, r_{b2} = r_2 \cos \alpha_0 = 10,5 \cdot 0,94 = 9,87 \text{ мм}.$$

Коефіцієнт зміщення:

$$x_1 = \frac{17 - z_1}{17} = \frac{17 - 14}{17} = 0,176; \text{ так як } z_2 > 17, \text{ тоді } x_2 = 0.$$

Монтажний кут передачі

$$\text{inv}\alpha_w = \text{inv}\alpha_0 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \tan \alpha_0 = 0,0149 + \frac{2 \cdot 0,176 \cdot 0,364}{35} = 0,01827, \text{ тоді } \alpha_w = 21^\circ 21'.$$

Радіуси початкових кіл:

$$r_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w} = \frac{6,58}{0,9315} = 7,6 \text{ мм}, r_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w} = \frac{9,87}{0,9315} = 10,59 \text{ мм}.$$

Міжосьова відстань:

$$a_{1,2} = r_{w1} + r_{w2} = 7,6 + 9,59 = 17,65 \text{ мм}.$$

10.7 Завдання для самостійної роботи.

Для пари зубчастих коліс зовнішнього зачеплення задані: міжосьова відстань $a_{1,2}$, передаточне відношення $i_{1,2}$ і модуль зачеплення m , які наведені у

Таблиця 10.1 Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант	$a_{1,2}$, мм	$i_{1,2}$	m , мм	Варіант	$a_{1,2}$, мм	$i_{1,2}$	m , мм
1	360	3	10	11	500	5	25
2	400	4	12	12	550	6	30
3	420	4	14	13	600	5	36
4	440	5	16	14	380	3	15
5	480	6	20	15	400	4	18
6	500	5	22	16	430	4	20
7	450	4	18	17	445	5	22
8	430	4	15	18	470	5	25
9	420	5	18	19	490	6	30
10	480	4	19	20	500	5	35

таблиці 10.1 згідно варіантів. Визначити число зубців обох коліс.

10.8 Контрольні питання.

1. Що називається зубчастою передачею? Зубчасте колесо, шестерня.
2. Різновиди зубчастих передач.
3. Основні геометричні розміри евольвентного зубчастого зачеплення.
4. Кутове корегування.
5. Основні формули розрахунку зубчастого зачеплення.

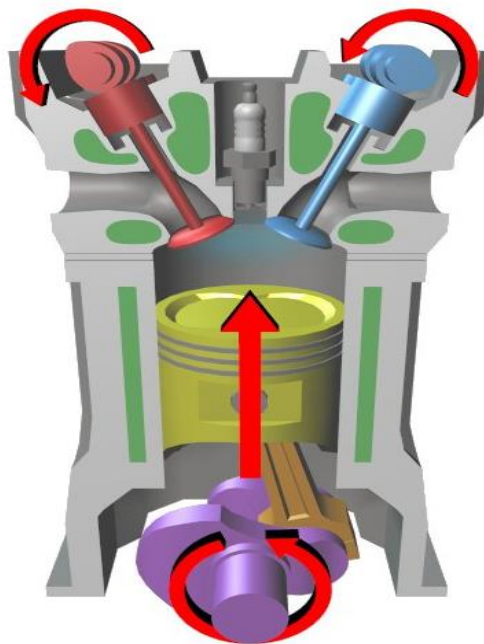
Кінематичний аналіз плоских кулачкових механізмів

Мета роботи: навчитись будувати профіль кулачка за заданною геометрією та законом руху штовхача.

Теоретична частина

11.1 Кулачкові механізми

Для забезпечення робочого процесу багатьох машин часто потрібно вводити до їх складу механізми, рух вихідних ланок яких відбувається за конкретними законами, узгодженими із законами руху інших механізмів. Простим та надійним вирішенням цієї проблеми є компактні кулачкові механізми (рис.11.1)



11.1 Кулачковий газорозподільний механізм вертольота

Кулачковий механізм – це триланковий механізм, який складається зі стояка і двох рухомих ланок, що утворюють між собою вищу кінематичну пару, а зі стояком – дві нижчі кінематичні пари.

Вхідною ланкою в кулачковому механізмі, як правило, є *кулачок*, тобто ланка, якій належить елемент вищої кінематичної пари, виконаний у вигляді поверхні змінної кривизни.

Вихідні ланки можуть здійснювати зворотно-поступальний, зворотно-обертальний або просторовий рухи. Поступально рухома вихідна ланка називається *штовхачем*, а обертально рухома – *коромислом*.

11.2 Види кулачкових механізмів

Розрізняють *плоскі* і *просторові* кулачкові механізми. Основна увага нами буде приділена плоским кулачковим механізмам, як найбільш розповсюдженим в техніці. Нижче розглянемо плоскі кулачкові механізми.

Плоскі кулачкові механізми. Як і в будь-якому іншому плоскому механізмі, в плоскому кулачковому механізмі всі його точки рухаються в паралельних площинах. Класифікують плоскі кулачкові механізми за кінематичними та конструктивними ознаками:

а) За характером рухів, які здійснюють кулачок і штовхач:

- зворотно-поступальний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний рух штовхача (рис. 11.2 а);
- зворотно-поступальний рух кулачка перетворюється в зворотно-обертальний рух штовхача (рис. 11.2 б);
- обертальний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний рух штовхача. Цей тип механізмів буває центральним (рис. 11.2 в) і нецентральним або з ексцентриситетом (рис. 11.2 г);
- обертальний рух кулачка перетворюється в зворотно-обертальний рух штовхача (рис. 11.2 д).

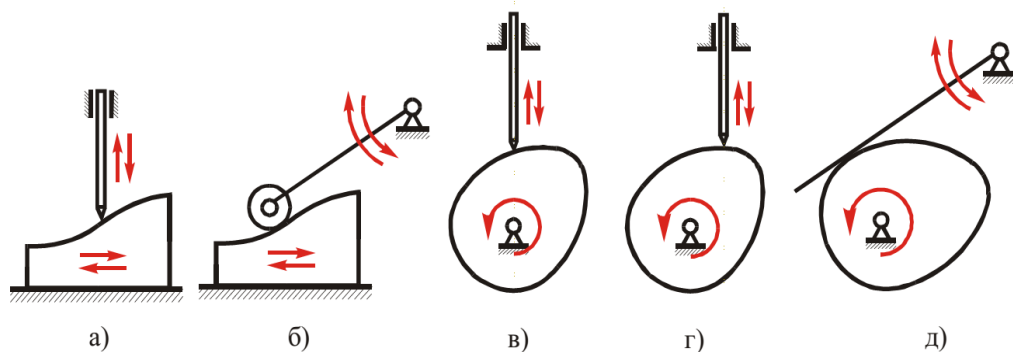


Рис. 11.2 Схеми кулачкових механізмів залежно від характеру рухів їх ланок: з поступально рухомим кулачком (а, б); з обертальним кулачком (в, г, д)

б) За типом штовхача:

- із загостреним штовхачем (рис. 11.3 а, в, г)

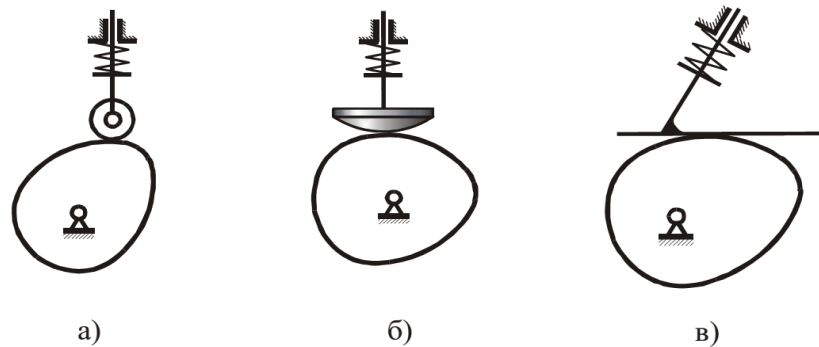


Рис. 11.3 Схеми кулачкових механізмів залежно від типу штовхача:

а – зі штовхачем, спорядженим роликом; б– зі сферичним грибоподібним штовхачем; в – з плоским тарілчастим штовхачем

- зі штовхачем, спорядженим роликом (рис. 11.3,б та рис. 11.3,а)
- зі сферичним грибоподібним штовхачем (рис. 11.3,б)
- з плоским тарілчастим штовхачем (рис. 11.3,д; рис. 11.3,в).

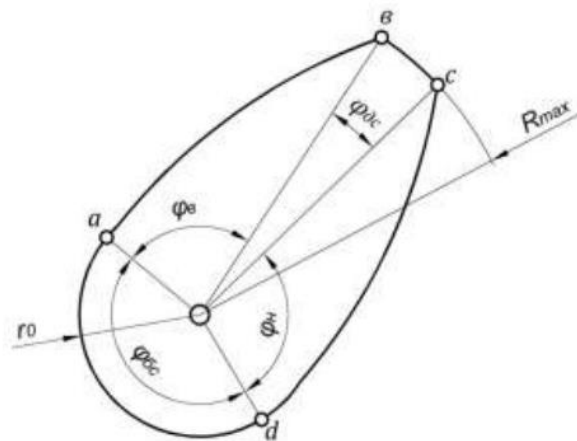


Рис.11.4 Фазові кути повороту і кути профілю кулачка

Кулачок – ланка змінної кривизни, яка в більшості випадків має чотири характерні ділянки (рис. 11.4): (ab) , (bc) , (cd) і (da) . Кожній із цих ділянок відповідає центральний кут профілю кулачка. Так, ділянці (ab) відповідає

кут а ділянкам (bc) , (cd) і (da) відповідно кути $\varphi_{oc}, \varphi_n, \varphi_{oc}$. При обертанні кулачка кожній ділянці відповідає певний період руху вихідної ланки (штовхача). Кути повороту кулачка, що визначають відповідні рухи штовхача називаються *фазовими кутами*. За час одного оберту кулачка можна виділити такі фази руху штовхача: *віддалення, дальнього стояння, наближення та ближнього стояння*. Кожній з цих фаз відповідає певний фазовий кут: $\varphi'_e, \varphi'_{oc}, \varphi'_n, \varphi'_{oc}$.

У центральних кулачкових механізмах фазові кути збігаються з кутами профілю кулачка. Тобто: $\varphi_e = \varphi'_e, \varphi_{oc} = \varphi'_{oc}, \varphi_n = \varphi'_n, \varphi_{oc} = \varphi'_{oc}$. Робочий кут в таких механізмах дорівнює сумі перших трьох фаз:

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_{oc} + \varphi_n \quad (11.1)$$

Для кулачкових механізмів зі зміщенням, фазові кути не збігаються з кутами профілю кулачка, тобто вони не рівні між собою. З геометричної точки зору кулачок характеризується не тільки кутами профілю, а й радіусами кривизни (мінімальним r_o і максимальним R_{max}).

Для центрального кулачкового механізму типу максимальний хід штовхача визначається різницею максимального і мінімального радіусів кулачка:

$$S_{max} = R_{max} - r_o.$$

В кулачкових механізмах зі зміщенням штовхача ця рівність не зберігається.

11.3 Закони руху штовхача

Синтез кулачкового механізму зводиться до визначення основних розмірів кулачка та побудови його профілю, якщо відомий закон руху штовхача. Закон руху штовхача $S = S(t)$ це залежність переміщення штовхача від часу або кута повороту кулачка. Закон руху кулачка визначається профілем кулачка і є головною характеристикою кулачкового механізму. При рівномірному обертанні кулачка закон руху штовхача одночасно являється залежністю переміщення штовхача від кута повороту кулачка $S = S(\varphi)$.

Всі закони руху штовхача можна розділити на три групи:

- 1) закони руху, при яких штовхач рухається з жорсткими ударами (рис. 11.5,а);
- 2) закони руху, при яких штовхач рухається з м'якими ударами (рис.11.5,б);
- 3) закони руху, при яких штовхач рухається без ударів (рис.11.5,в).

Найпростішим законом є лінійний закон руху штовхача при його підніманні та опусканні, в цьому випадку штовхач здійснює рівномірний рух ($v = \text{const}$). Для цього закону характерними є стрибки швидкості, тобто на певних ділянках руху виникають удари. На початку і в кінці руху прискорення штовхача, а значить, і сили інерції досягають нескінченності ($a = \pm \infty$), що

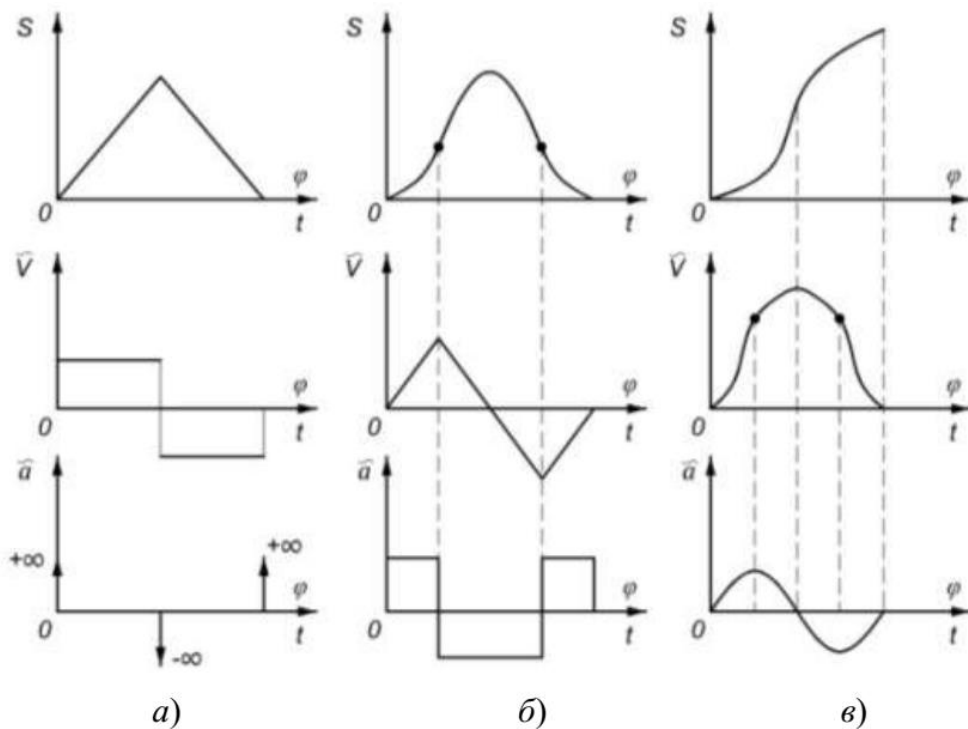


Рис.11.5 Закони руху штовхача

призводить до так званих жорстких ударів. На практиці значення швидкостей і сил інерції не досягають нескінченності завдяки пружності ланок механізму, але незважаючи на все це, у крайніх положеннях штовхача виникають значні сили, які можуть призвести до розмикання кулачка з штовхачем, що, в свою чергу, приводить до жорстких ударів. Це

явище небажане, бо кулачкові механізми швидко спрацьовуються. Для швидкохідних кулачкових механізмів цей закон недопустимий.

Щоб забезпечити плавний перехід швидкості штовхача використовують закони руху з м'якими ударами. У цих законах удари з'являються при миттєвій зміні прискорень на скінченну величину. Прикладом руху, під час якого відбуваються м'які удари, може слугувати рух штовхача, який працює по параболічному закону руху кулачка. Ці закони менш небезпечні, тому їх можна використовувати при обертах кулачка до 2000 хв^{-1} .

Якщо швидкість і прискорення змінюються плавно та свою зміну починають і закінчують нульовими значеннями, то такий кулачковий механізм працює без ударів. До таких законів можна віднести синусоїдальний закон зміни прискорення. Він забезпечує найбільшу плавність руху штовхача і використовується у бистрохідних кулачкових механізмах.

Щоб побудувати графік $S = S(t)$ необхідно визначити масштаби μ_s і μ_t . Для визначення масштабного коефіцієнту μ_t необхідно розрахувати наступні показники.

Час одного оберту кулачка:

$$t_{об} = \frac{60}{n_1},$$

де n_1 - кількість обертів кулачка за 1 хв.

Час t_p , протягом якого кулачок повертається на робочий кут:

$$t_p = \frac{\varphi_p}{60n_1}.$$

Масштабний коефіцієнт μ_t визначається за формулою:

$$\mu_t = \frac{\varphi_p}{60n_1x_t}.$$

де x_t довільно вибраний відрізок на осі абсцис.

11.4 Кут тиску. Визначення мінімального радіуса кулачка при заданому куту тиску

Кутом тиск ψ називається кут між напрямом сили F_{12} , яка діє з боку кулачка на штовхач, і напрямом переміщення штовхача (рис. 11.6).

Сила F_{12} може бути розкладена на дві складові. Перша складова $T = F_{12} \cos \psi$ приводить штовхач в рух. Друга складова $N = F_{12} \sin \psi$ відхиляє штовхач від його осі притискуючи до направляючих поступальної кінематичної пари, викликаючи сили тертя, а в деяких випадках відбувається заклинювання штовхача.

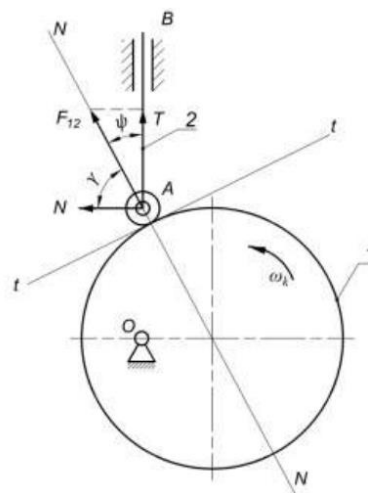


Рис.11.6 Кулачковий механізм

Для того, щоб у кулачковому механізмі не виникало заклинювання, необхідно, щоб кут тиску ψ у всіх положеннях механізму був меншим від критичного кута $\psi_{кр}$ тобто дотримувалась умова $\psi_{дон} \leq \psi_{кр}$. Кут тиску залежить від геометричних і кінематичних характеристик механізму.

На практиці для кулачкових механізмів типу А допустимий кут тиску $\psi_{дон} = 30^\circ$, а для кулачкових механізмів типу Б $\psi_{дон} = 45^\circ$. Дуже часто, на практиці, користуються кутом передачі руху (γ). Це кут, який доповнює кут тиску до

90° (рис. 11.7). Мінімальний радіус кулачка (r_o) визначається із графіка залежності переміщення (S) від аналога швидкості (\tilde{v}).

Графік $S=S(\tilde{v})$ будується наступним чином. Проводиться вертикальна вісь, на ній послідовно відкладається переміщення (S) штовхача, а аналоги швидкостей (\tilde{v}) відкладаються із отриманих точок вздовж осі абсцис, при чому, якщо кулачок обертається проти руху годинникової стрілки, то (\tilde{v}) відкладають вліво на фазі віддалення ($\tilde{v}>0$) і вправо на фазі наближення (рис. 11.7). Масштабні коефіцієнти μ_s і $\mu_{\tilde{v}}$ повинні бути рівні між собою і дорівнювати μ_l .

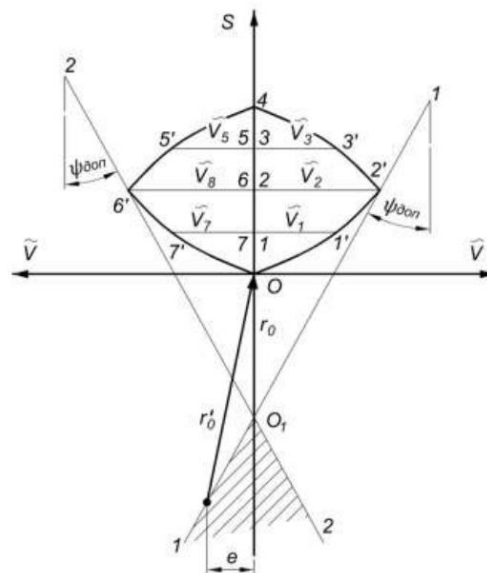


Рис. 11.7 Залежність переміщення від аналога швидкості

Максимальне значення кута тиску буде тоді коли пряма (1–1) буде дотичною до діаграми $S=S(\tilde{v})$. Проводимо під кутом ψ_{don} дві дотичні (1–1) і (2–2) до цієї діаграми, перетин дотичних визначить зону (на рис.11.7 заштрихована), в якій, вибраний центр обертання кулачка, забезпечить умову не заклинювання кулачкового механізму. Точка O_1 , перетин дотичних визначає положення осі обертання кулачка, який має найменший допустимий мінімальний радіус кулачка r_o :

$$r_o = (O_1O) \cdot \mu_l,$$

де r_o - масштаб довжин м/мм. Радіус r_o' - дає ексцентриситет e .

11.5 Приклади на проектування і дослідження кулачкових механізмів

Приклад 1. Побудувати профіль кулачка кулачкового механізму типу А (рис. 11.9), якщо $r = 20\text{мм}$, $\varphi_{\text{в}} = \varphi_{\text{н}} = 180^\circ$, $S_{\text{max}} = 30\text{мм}$, $e = 0$. Закон руху на фазах віддалення і наближення лінійний.

Рішення. Будуємо лінійний закон руху штовхача, для цього на осі абсцис відкладаємо відрізок рівний 60мм (рис. 11.8). визначаємо масштаби діаграми.

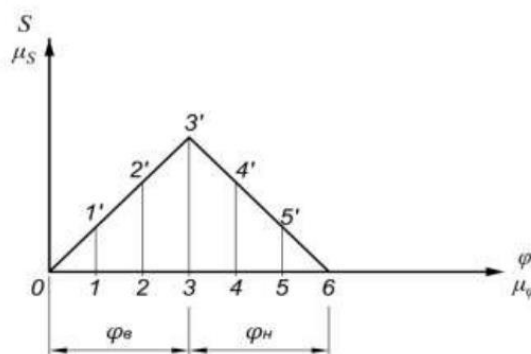


Рис. 11.8 Закон руху штовхача

$$\mu_{\varphi} = \frac{\varphi_{\text{max}}}{(0-6)} = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6\text{град} / \text{м}.$$

$$\mu_S = \frac{S_{\text{max}}}{\tilde{S}} = \frac{360^\circ}{60^\circ} = \frac{30}{30} = 1\text{мм} / \text{мм}.$$

З центра обертання кулачка точки проводимо коло радіусом $r_o = AO$ (рис. 11.9). З точки перетину основного кола з лінією руху штовхача відкладаємо вгору максимальний хід штовхача $S_{\text{max}} = 30\text{мм}$ (на рис.11.10 не показано). Радіусом $R_{\text{max}} = S_{\text{max}} + r_o$ проводимо коло максимального радіуса, на рис. 11.10 це відрізок $(A-3')$. У нашому випадку $R_{\text{max}} = 50\text{мм}$. Від лінії вліво відкладаємо фазові кути $\varphi_{\text{в}}$ і $\varphi_{\text{н}}$.

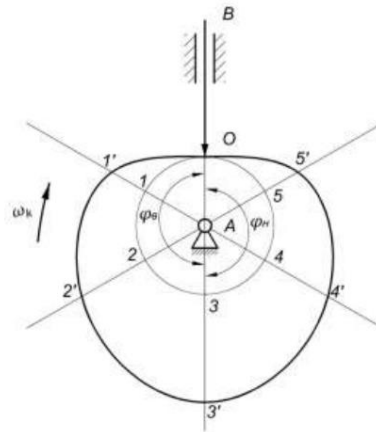


Рис. 11.9 Побудова профілю кулачка

Фазові кути φ_6 і φ_n ділимо на три рівні частини. На основному колі поділ позначаємо цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Через отримані точки проводимо промені, які виходять із центра обертання кулачка. На променях відкладаємо переміщення штовхача, взяті з діаграми $S = S(\varphi)$, (рис. 11.10). На першому промені відрізок (1–1'), на другому (2–2'), на третьому (3–3'), на четвертому (4–4') і т. д. Отримані точки з'єднуємо плавною кривою.

Приклад 2. Визначити максимальний кут тиску в кулачковому механізмі, якщо мінімальний радіус кулачка $r_0 = 15 \text{ мм}$ максимальний хід штовхача $S_{\max} = 50 \text{ мм}$. Закон руху штовхача на фазах віддалення і наближення лінійний. Кути $\varphi_6 = \varphi_n = \pi$.

Рішення. Визначаємо аналоги швидкості відповідно на фазах віддалення і наближення:

$$\tilde{v}_6 = \tilde{v}_n = \frac{S_{\max}}{\varphi_6} = \frac{50}{\pi} = 15,91 \text{ мм}.$$

Будуємо діаграми $S = S(\tilde{v})$ (рис. 11.10). Від точки вниз відкладаємо $r_0 = 15 \text{ мм}$. Отримана точка O_1 буде центром обертання кулачка. З точки O_1 проводимо дотичну лінію до діаграми $S = S(\tilde{v})$, як це показано на рисунку. За допомогою трикутника $\triangle OO_1A$ визначаємо максимальний кут тиску:

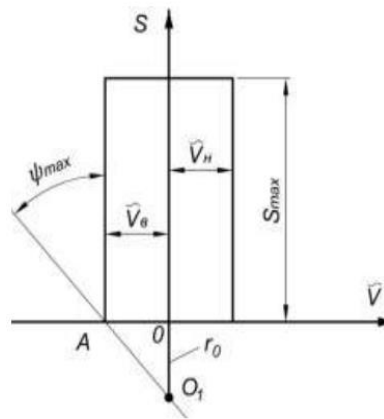


Рис.11.10 Діаграма залежності переміщення від аналога швидкості

$$\tan \psi_{\max} = \frac{OA}{O_1O} = \frac{15,91}{15} = 1,61.$$

Тоді,

$$\tan^{-1} \psi_{\max} = \frac{OA}{O_1O} = \frac{15,91}{15} = 46^{\circ}70'$$

11.6 Завдання для самостійної роботи

Побудувати профіль кулачкового механізму типу А, якщо відомі r_0, S_{\max} (таблиця 11.1). Закон руху на фазах віддалення та наближення лінійний (рис.11.8). Визначити максимальний кут тиску у кулачковому механізмі.

Таблиця 11.1 Варіанти завдань для самостійної підготовки

Варіант	r_0 , мм	S_{\max} , мм	Варіант	r_0 , мм	S_{\max} , мм
1	2	3	4	5	6
1	20	30	11	40	50
2	22	32	12	42	52
3	24	34	13	44	54
4	26	36	14	46	56

1	2	3	4	5	6
5	28	38	15	48	58
6	30	40	16	50	60
7	32	42	17	52	62
8	34	44	18	54	64
9	36	46	19	56	68
10	38	48	20	58	70

11.7 Контрольні питання

- 1.Що називається кулачковим механізмом?
2. Види кулачкових механізмів.
3. Класифікація плоских механізмів.
4. Закони руху штовхача. Кут тиску.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *О.П. Заховайко*. Теорія механізмів і машин. Курс лекцій для студентів спеціальності «Динаміка і міцність машин». Київ-НТУУ «КПІ»-2010, 243с.
<http://mmi-dmm.kpi.ua/images/pdf/personnel/Zakhov/Lectures.pdf>
2. *В.М. Арендаренко, О.М.Іванов, О.О.Назаренко*. Основи дослідження і проектування механізмів і машин. –Полтава-2016, 272с.
<http://dspace.pdaa.edu.ua:8080/bitstream/123456789/8453/1/book.pdf>
3. *В.М. Арендаренко, І.А. Дудніков*. Теорія механізмів і машин в прикладах і задачах.- Полтава-2020, 174с.
<http://dspace.pdaa.edu.ua:8080/bitstream/123456789/8450/1/zadachnik.pdf>
4. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. М.: Наука.-1988.- 640 с.
5. *Кіницький Я.Т.* Теорія механізмів і машин. Підручник. -Київ. Видавництво «Наукова думка», -2002-660 с.
http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2021/Kinitsky_2002_661.pdf
6. *И.И.Артоболевский, Б.В.Эдельштейн*. Сборник задач по теории механизмов и машин. – М: Наука-1975,256с.
7. *О.А.Кірієнко, Л.Г.Овсієнко*. Теорія механізмів і машин. Побудова кінематичної схеми плоского механізму та його структурний аналіз. Методичні вказівки.- Київ НТУУ «КПІ» 2010, 33с.
8. *О.А.Кірієнко*. Методичні вказівки до практичних занять з кредитного модуля «Прикладна механіка» для студентів технічних напрямків підготовки.- Київ НТУУ «КПІ» 2016,96с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/15161>
9. *Е. Л.Гордієнко, В.А.Мешков, О.Л.Сотніков, В.Г.Пархоменко*. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія механізмів і машин».- Донецьк: ДонНТУ, 2010. 63с.
10. *А.І. Соколенко, А.І. Українець, О.Ю. Шевченко, К.В. Васильківський, В.Л. Яровий, С.І. Блаженко, В.А. Піддубний*. Теорія механізмів і машин. Курсове проектування.-Київ: НУХТ,2005,257с.
<https://learn.zhatk.zt.ua/course/view.php?id=241>
11. *Сунь Линь, В. В. Борисов, В. П. Зинченко, Д. И. Конотоп*. Процедура предварительного проектирования шасси транспортных самолетов – // Інформаційні системи, механіка та руйнування. Київ-2012,в.8,с.60-70.